O Guia Completo para Quem Não É C.D.F.

Álgebra

Tradução da 2ª Edição

O professor de matemática que você sempre quis, agora em forma de livro

W. Michael Kelley

Sobre o autor

W. Michael Kelley é um premiado professor de matemática do sul de Maryland. Ele se formou em matemática pela St. Mary's College of Maryland em 1994 com duas grandes metas em mente: (1) fazer com que a matemática seja mais acessível ao grande público (afinal de contas, por que não deveria ser?), e (2) se tornar o palhaço de rodeio mais amado de Texarkana. No entanto, desde um incidente que ele apenas se refere como "o derramamento de sangue", ele está se concentrando apenas em sua primeira meta.

Durante seus sete anos como professor de matemática do ensino público, ele recebeu muitos elogios e foi reconhecido como professor excepcional pelo Maryland Council of Teachers of Mathematics. Ele também passou algum tempo ensinando cursos universitários, incluindo introdução à álgebra.

Kelley escreveu vários outros livros, incluindo o bem-sucedido *O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. — Cálculo* e *O Fabuloso Livro de Exercícios de Cálculo*. Elogiado pela sua habilidade em explicar complicados conceitos matemáticos com um senso de humor bizarro mas ainda cativante, Kelley é também o criador e editor do site www.calculus-help.com, que ajuda todo mês milhares de estudantes a superar suas ansiedades matemáticas. Se você gostou deste livro, vá até esse site e mande-o um e-mail para que ele saiba.

Mike mora em Maryland com sua esposa Lisa, filho Nicholas e filhas gêmeas Erin e Sara.

O Guia Completo para Quem Não É C.D.F.

Álgebra

Tradução da 2ª Edição

W. Michael Kelley

O Guia Completo para Quem Não É C.D.F. — Álgebra, Tradução da 2ª Edição Copyright © 2013 da Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli.
ISBN: 978-85-7608-714-4

Impresso no Brasil — 1ª edição, 2014

Produção Editorial
Editora Alta Books

Gerência Editorial
Anderson Vieira

Editoria de Séries
Claudia Braga

Supervisão Gráfica
Angel Cabeza

Supervisão de Qualidade Editorial
Sergio Luiz de Souza

Supervisão de Texto
Jaciara Lima

Conselho de Qualidade Editorial
Anderson Vieira
Angel Cabeza
Jaciara Lima
Rodrigo Araujo
Sergio Luiz de Souza

Design Editorial
Auleriano Messias
Marco Aurélio Silva

Marketing e Promoção
marketing@altabooks.com.br

Equipe Editorial
Cristiane Santos
Daniel Siqueira
Elaine Mendonça
Evellyn Pacheco
Hannah Carriello
Livia Brazil
Marcelo Vieira
Milena Souza
Thiê Alves

Tradução
Luiza Moreira Guimarães Cabreira

Copidesque
Mateus Colombo Mendes

Revisão Gramatical
Bárbara Azevedo

Revisão técnica
Kleber Kilhian de Almeida – *Licenciado em Matemática com Habilitação em Física*

Diagramação
Lucia Quaresma

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

K29g Kelley, W. Michael.
O guia completo para quem não é C.D.F. : álgebra / W. Michael Kelley. – Rio de Janeiro, RJ : Alta Books, 2013.
336 p. : il. ; 24 cm. – (O guia completo para quem não é C.D.F)

Inclui índice e apêndice.
Tradução de: The Complete Idiot's Guide to Algebra (2. ed.).
ISBN 978-85-7608-714-4

1. Álgebra - Estudo e ensino. 2. Equações. 3. Funções algébricas. 4. Funções exponenciais. I. Título. II. Série.

CDU 512
CDD 512

Índice para catálogo sistemático:
1. Álgebra 512

(Bibliotecária responsável: Sabrina Leal Araujo – CRB 10/1507)

Rua Viúva Cláudio, 291 – Bairro Industrial do Jacaré
CEP: 20970-031 – Rio de Janeiro – Tels.: 21 3278-8069/8419 Fax: 21 3277-1253
www.altabooks.com.br – e-mail: altabooks@altabooks.com.br
www.facebook.com/altabooks – www.twitter.com/alta_books

Sumário Resumido

Sumário

Apêndices

Introdução

Imagine a cena: sou um estudante do ensino médio, cheio de hormônios e bolinhos açucarados, graças à puberdade e ao fato de eu ter gasto os 3 reais que minha mãe me deu para comprar um lanche saudável ao invés de bolinhos e chocolate na cantina. Sou jovem o suficiente para ainda gostar da escola, mas velho o bastante para entender que não devo agir assim, e minha mente está ativa, alerta e ligada. Há apenas mais duas aulas para o dia acabar, e com isso na cabeça, vou para a aula de álgebra.

Pensando bem, eu acho que a professora tem algum tipo diabólico de arma de raio laser escondida no teto da sala de aula que suga e destrói toda a diversão e alegria, porque é só eu entrar na aula de álgebra que fico mal-humorado. É quente, como um sovaco de jogador de futebol, naquele calabouço escuro e sem janelas, que, estranhamente, cheira a um quarto cheio de pessoas que acabaram de correr uma maratona. Um cheiro indefinido, mas forte, de suor e fedor corporal atacam meus sentidos, e eu deito em minha cadeira.

"Eu tenho que ficar acordado hoje", digo a mim mesmo. "Estou à beira de ficar completamente perdido, se eu não prestar atenção novamente, não vou entender nada e temos uma prova daqui a alguns dias." No entanto, não adianta o quanto eu lute e me convença a prestar atenção, é completamente impossível.

A professora entra e liga o ventilador na tentativa de mover o ar fedido e reavivar a turma. Imediatamente, ela começa a falar com sua voz calma e relaxante e começo a ver o mundo de forma nebulosa e desfocada. Uma voz calma e monótona, o zumbido do ventilador, o calor fedorento que ocupa cômodos construídos com blocos de concretos coloridos... Todos os elementos que atrapalham meus esforços em me manter acordado.

Eu olho ao redor da sala e, em menos de 10 minutos, a maior parte dos alunos está dormindo. Os poucos que ainda estão acordados escrevem bilhetes para seus namorados ou namoradas. O melhor jogador de futebol da escola senta do meu lado, os olhos arregalados e olhando fixamente para a capa do seu caderno, regressando ao estado vegetativo do início da aula. Começo a cantar meu mantra diário para mim mesmo "Eu odeio essa aula, eu odeio essa aula, eu odeio essa aula..." – e é verdade. Até onde sei, álgebra é a coisa mais chata que já foi inventada e existe pelo simples propósito de destruir minha felicidade.

Você se identifica com essa história? Mesmo que os detalhes individuais não sejam iguais aos da sua experiência, você também tem um mantra parecido? Algumas pessoas não acreditam que uma pessoa formada em matemática odiava matemática durante seus anos de formação. Acho que a matemática ficou mais interessante depois de álgebra, ou minha atenção melhorou – no entanto, não

é o curso natural das coisas. Felizmente, minha experiência extremamente ruim com a matemática não me preveniu de ter mais aulas, e minha opinião finalmente mudou, mas a maioria das pessoas chega à álgebra e desiste da matemática para sempre.

Foi quando decidi voltar e reviver as aulas terrivelmente chatas e difíceis de matemática que tive, e escrever livros que não só explicassem as coisas de forma mais clara, mas que tivessem uma linguagem usada no dia a dia. Além disso, sempre achei que era mais fácil aprender algo quando era possível rir um pouco daquilo, mas essa não é necessariamente a opinião da maior parte dos profissionais em matemática. Um matemático que fez a crítica do meu livro *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Cálculo*, antes de ser lançado, disse-me: "Eu não acho suas piadas apropriadas. Livros de matemática não devem ter humor porque a matemática já é divertida por si só.".

Eu acho essa lógica insana. Neste livro, tentei apresentar álgebra de uma forma interessante e relevante e tentarei fazer você rir algumas vezes, apesar do sofrimento. Não quis escrever um livro chato, mas, ao mesmo tempo, não quis escrever um livro repleto de piadas bobas, o que seria um insulto à sua inteligência.

Também tentei incluir o maior número possível de exercícios, sem fazer com que este livro tivesse um milhão de páginas. (Livros assim são difíceis de carregar e geralmente são caros; além do mais, você nem imagina o valor do frete se você comprá-los pela internet!). Cada seção contém exemplos com explicações completas e problemas práticos para você fazer por conta própria, em pequenos quadros intitulados "Você Tem Problemas". Adicionalmente, o Capítulo 20 é repleto de problemas práticos baseados nos exemplos vistos ao longo do livro, para ajudá-lo a identificar suas deficiências, se você já teve aulas de álgebra antes, ou para testar seu conhecimento geral, se você já terminou o livro. Lembre-se de que é sempre bom revisar seus livros de álgebra e solucionar ainda mais problemas, para melhorar suas habilidades depois que você tiver terminado os deste livro, porque repetição e prática transformam aprendizes em mestres.

Álgebra não é algo que só pode ser entendido por um grupo seleto de pessoas. Você pode entender e se sobressair em sua aula de álgebra. Pense neste livro como um professor particular que está disponível 24 horas por dia, 7 dias da semana, sempre pronto a explicar os mistérios da matemática à você, mesmo quando as coisas ficam complicadas.

Como Este Livro É Organizado

Este livro é dividido em sete seções:

Na **Parte 1, "Um Último Adeus aos Números"**, você vai verificar todas as suas habilidades aritméticas básicas, para garantir que elas estejam afinadas e prontas para encarar os desafios da álgebra. Você calculará o Máximo divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum, revisará regras exponenciais, visitará as principais propriedades algébricas e explorará a ordem correta das operações.

Na **Parte 2, "Equações e Inequações"**, a preparação acabou e é hora da álgebra completa. Você solucionará equações, desenhará gráficos, criará equações da reta e investigará inequações com uma ou duas variáveis.

Na **Parte 3, "Sistemas de Equações e Álgebra Matricial"**, você encontrará soluções compartilhadas de múltiplas equações e aprenderá o básico da álgebra de matrizes, um novo ramo da álgebra que emplacou com o nascimento da era da informática.

As coisas começam a ficar mais intensas na **Parte 4, "Agora Você Está Brincando Com Potência (Exponencial)!"**, porque os expoentes não estão mais satisfeitos em ficarem pequenos. Você aprenderá a lidar com polinômios e radicais e a resolver equações que contêm variáveis elevadas à segunda, à terceira e à quarta potência.

A **Parte 5, "A Junção da Função"**, apresenta você à função matemática, que será o centro da sua carreira matemática. Você aprenderá como calcular o domínio e o intervalo da função, achar seu inverso e fazer gráficos sem ter que recorrer a uma tabela de valores chata e repetitiva.

Frações voltam à evidência na **Parte 6, "Por favor, Seja Racional!"**. Você aprenderá a fazer tudo o que está acostumado a fazer com frações simples (como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir) quando os conteúdos das frações ficam mais complicados.

E finalmente, na **Parte 7, "Finalizando as Coisas"**, você enfrentará o valentão da álgebra, o problema. Entretanto, depois que você aprender alguns truques para encarar o problema de frente, você não sentirá mais medo deles. Você também terá a chance de colocar suas habilidades em prática no "Teste Final"; mas não se preocupe, não valerá nota.

Coisas Para Ajudá-lo ao longo do caminho

Sendo um professor, pego-me constantemente indo pelas tangentes – tudo o que eu falo me lembra outra coisa. Esses pensamentos periféricos também se encontram neste livro. Segue um guia dos diferentes quadrinhos que você observará salpicados nas páginas seguintes:

Você Tem Problemas

Matemática não é um esporte de espectadores! Ao apresentar um tópico, eu explicarei como resolver um determinado tipo de problema e, então, você tentará sozinho. Esses problemas serão bastante parecidos com aqueles que eu expliquei durante os capítulos, mas agora será a sua vez de brilhar. Você achará todas as respostas, explicadas passo a passo, no Apêndice A.

Alerta do Kelley

Apesar de eu advertir sobre os erros e perigos comuns ao longo do livro, os perigos nesses quadrinhos merecem sua atenção especial. Pense neles como sinais, no meio do caminho, pintados com uma caveira e dois ossos cruzados. Prestar atenção nestes avisos pode evitar horas de frustração.

Ponto Crítico

Estas notas, dicas e pensamentos vão ajudar, ensinar e entreter. Elas dão algo a mais no tópico discutido: seja um bom conselho, um pouco de sabedoria ou apenas algo para melhorar o humor.

Fale a Linguagem

A álgebra é cheia de **palavras** e **frases** estranhas e nerds. Para você se tornar o Rei ou a Rainha Nerd da Matemática, tem que saber o que elas significam!

Como Eles Fazem Isso?

Geralmente, fórmulas algébricas aparecem como mágica ou você só faz algo porque o professor mandou. Se você já pensou "Como isso funciona?","De onde veio isso?" ou "Como isso aconteceu?", é aqui que você achará a resposta.

Agradecimentos

Se eu aprendi alguma coisa nesse curto período como escritor, é que escritores são pessoas inseguras que necessitam de atenção e apoio constantes de amigos, membros da família e pessoas da editora; e eu tive sorte com todos. Agradecimentos especiais à pessoa que mais me apoiou, Lisa, que nunca reclamou quando eu marchava pro porão e mergulhava no trabalho, dia sim, dia não (e ainda não ligava se eu assistia futebol durante o final de semana inteiro – honestamente, ela deve ser a melhor esposa do mundo). Obrigado também à minha grande família e a amigos, especialmente Dave, Chris, Matt e Rob, que nunca agiram como se estivessem cansados de ouvir cada detalhe chato que eu contava sobre o livro que estava escrevendo.

Obrigado à minha agente, Jessica Faust da Bookends, LLC, que lutou e lutou por duas grandes oportunidades para eu escrever um livro, e a Nancy Lewis, minha editora de desenvolvimento, que está sempre disposta a apagar os pequenos incêndios que acabo causando todos os dias. Também tenho que agradecer a Mike Sanders da Pearson/Penguin, que deve ter muita experiência com escritores neuróticos, porque ele sempre é muito legal comigo.

Sue Strickland, minha mentora e antiga professora universitária, que concordou mais uma vez em revisar tecnicamente este livro, e estou em dívida com ela por sua direção e seu conhecimento. O amor dela por seus alunos é contagioso e foi inevitável eu também ter herdado isso.

Ao longo deste livro você encontrará ilustrações feitas por Chris Sarampote, um amigo de longa data e um artista magnífico. Obrigado, Chris, pelos seus desenhos incríveis e por sua paciência quando eu ligava a você no meio da noite e falava "Eu acho que a seta na figura do futebol está curvada demais".

Finalmente, tenho que agradecer a Daniel Brown, meu professor de Inglês no colégio, que um dia me chamou em um canto e falou "Um dia você escreverá livros de matemática para pessoas como eu, que abordam matemática com muito medo e insegurança". O seu encorajamento, profissionalismo e conhecimento são a maior razão para essa profecia ter se tornado realidade.

Agradecimentos Especiais ao Revisor Técnico

O *Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Álgebra* foi revisado por um especialista que verificou a exatidão de tudo que você aprenderá aqui, para garantir que este livro comunique de forma precisa tudo o que você precisa saber sobre álgebra. Agradecimentos especiais a Susan Strickland, que também forneceu o mesmo serviço para o *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. - Cálculo* (entre outros tantos títulos escritos por mim).

Susan Strickland recebeu seu diploma de bacharel em matemática pela St. Mary's College of Maryland em 1979, seu diploma de mestre em matemática pela Lehigh University em 1982 e fez cursos de graduação em matemática e educação da matemática na The American University, em Washington, D.C., de 1989 a 1991. Ela foi assistente de professor de matemática e supervisionou futuros professores de matemática secundária na St. Mary's College of Maryland, de 1983 até 2001. Foi durante esse período que ela teve o prazer de ensinar Michael Kelly e supervisionar suas habilidades como professor aprendiz. Desde 2001, ela é professora de matemática na College of Southern Maryland e está, agora, envolvida em ensinar matemática a futuros professores primários. Seus interesses são ensinar matemática para "matemático-fóbicos", treinar novos professores de matemática e resolver jogos e enigmas matemáticos (ela consegue até solucionar o Cubo Mágico).

Marcas Registradas

Parte 1

Um Último Adeus aos Números

Quando a maioria das pessoas pensa em matemática, pensa em "números". Para elas, matemática é só um jeito de calcularem quanto devem dar de gorjeta à garçonete. Entretanto, a matemática é muito mais do que uma substituta de um cartão de crédito dentro da sua carteira, que lhe diz os 10 por cento do seu jantar. Nesta parte, garanto que você saberá tudo sobre números e dominará todas as habilidades básicas que precisará mais tarde.

Capítulo 1

Ficando Íntimo dos Números

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Classificar tipos de números
- Lidar com milhares de sinais
- Praticar habilidades pré-algébricas
- Explorar pressupostos matemáticos comuns

A maioria das pessoas leigas em álgebra a vê como uma doença nojenta e assustadora, que tem como único propósito arruinar tudo que elas sabem sobre matemática. Elas entendem multiplicação e conseguem até dividir números que têm decimais (contanto que possam conferir a resposta em uma calculadora ou com um amigo nerd), mas álgebra é uma besta totalmente diferente — ela tem *letras*! Quando você começa a sentir que está entendendo matemática, todos estes *x*'s e *y*'s começam a aparecer em todos os lugares, que nem espinhas na adolescência.

Antes que eu comece a falar sobre essas letras (elas, na verdade, chamam-se *variáveis*), há algumas coisas que você precisa saber sobre esses números que você tem lidado por todos estes anos. Algumas das coisas discutidas neste capítulo vão soar familiares, mas provavelmente, algumas serão novas. Este capítulo, em essência, é um punhado de habilidades pré-algébricas que preciso revisar com você; é a última chance de conhecer melhor seus antigos amigos números, antes de jogarmos letras na mistura.

Classificando Conjuntos Numéricos

A maior parte das coisas pode ser classificada de formas diferentes. Por exemplo, se você tem um primo que se chama Scott, ele pode ser enquadrado nas seguintes categorias: pessoas da sua família, seus primos, pessoas com cabelo castanho e (indiscutivelmente) pessoas que deveriam escovar mais os dentes. Seria injusto considerar apenas a higiene do Scott (sorte dele); é apenas uma classificação. Se você considerar todos os grupos a que ele pertence, temos um quadro mais amplo:

- Pessoas da sua família
- Seus primos
- Pessoas com cabelo castanho
- Pessoas não higiênicas

O mesmo vale para os números. Números se encaixam em todos os tipos de categorias — e só porque eles pertencem a um grupo, não impede que eles pertençam a outros também.

Classificações Familiares

Você já conhece bem estas classificações de números há algum tempo. Na verdade, os próximos conjuntos numéricos provavelmente serão familiares:

- *Números pares*: Qualquer número que seja divisível por 2 é um número par, como 4, 12 e -10.
- *Números ímpares*: Qualquer número que não é divisível por 2 (ou seja, quando você divide por 2, há resto) é um número ímpar, como 3, 9 e -25.
- *Números positivos*: Todos os números maiores que 0 são considerados positivos.
- *Números negativos*: Todos os números menores que 0 são considerados negativos.

Fale a Linguagem

Se um número é **divisível** por 2, então, quando você o divide por 2, não há resto.

- *Números primos*: Os dois únicos números que são divisores de um número primo são o próprio número e o 1 (e isso não é um grande feito, porque todos os números são divisíveis por 1). Alguns exemplos de números primos são 5, 13 e 19. Por sinal, o 1 não é considerado um número primo, porque ele só é divisível por um número, enquanto os outros números primos são divisíveis por dois números.

Ponto Crítico

Tecnicamente, 0 é divisível por 2, então é considerado um número par. Entretanto, 0 não é positivo e nem negativo — ele fica numa espécie de purgatório matemático e pode ser classificado tanto como *não-positivo* quanto *não-negativo*.

- *Números compostos*: Se um número é divisível por outros, além de si mesmo e 1, então, é chamado de número composto, e todos os números que são divisíveis por ele (não havendo resto) são chamados de fatores. Alguns exemplos de números compostos são 4, 12 e 30.

Fale a Linguagem

Fator é um número que é divisível por um número e não deixa resto. Por exemplo, os fatores de 30 são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30.

Eu não estou questionando sua inteligência por estar revisando estas simples categorias, na verdade, só quero instilar um pouco de confiança antes de começarmos a discutir classificações um pouco mais complicadas.

Classificações Matemáticas Intensas

Historiadores da matemática (se você acha as pessoas da matemática chatas, você tem que conhecer estes caras) geralmente concordam que os primeiros seres humanos do planeta tinham um sistema numérico que era assim: um, dois, muito. Não havia necessidade de mais números. Para sua sorte, não é mais assim. Aqui estão as classificações numéricas menos conhecidas e que você precisa conhecer:

- *Números naturais*: Os números 1, 2, 3, 4, 5 e assim por diante, são chamados de números naturais (ou contáveis). São os primeiros números que te ensinam na infância, quando você está aprendendo a contar.

- *Conjunto dos números inteiros*: Coloque o número 0 nos números naturais e todos os negativos simétricos aos positivos e você terá os números inteiros. (O zero é um número inteiro, mas não é um número natural).

- *Números inteiros*: qualquer número que não tem um decimal explícito ou fração é um inteiro. Isso significa que -4, 17 e 0 são inteiros, mas 1,25 e $\frac{2}{5}$ não.

- *Números racionais*: Se um número pode ser expresso como um decimal que se repete infinitamente ou simplesmente acaba (chamado de *decimal finito*), então o número é racional. Basicamente, essas condições garantem uma coisa: o número é equivalente a uma fração, então, todas as frações são automaticamente racionais. (Você pode se lembrar disso com a frase "Racional significa fracional". As palavras soam quase iguais.) A fração $\frac{1}{3}$, o decimal finito 7,95, e o decimal infinito 0,8383838383... são todos números racionais.
- *Números irracionais*: Se um número não pode ser expresso como uma fração, ou sua representação decimal segue infinitamente mas os dígitos não seguem um padrão de repetição claro, então o número é irracional. Embora alguns radicais (raízes quadradas, raízes cúbicas e semelhantes) sejam irracionais, o número irracional mais famoso é o $\pi = 3{,}141592653589793...$ Não importa quantas milhares (ou milhões) de casas decimais você examine, não há nenhum padrão nos números. Se você estiver curioso, há mais números irracionais do que racionais, apesar de os racionais incluírem todas as frações imagináveis!
- *Números reais*: Se você juntar todos os números racionais e irracionais, você terá o conjunto dos números reais. Basicamente, qualquer número que pode ser expresso como um decimal (seja ele infinito, finito, bonito ou estranho, com uma boa personalidade) é considerado um número real.

Ponto Crítico

Como todo inteiro é divisível por 1, cada um pode ser escrito como uma fração. Isso significa que cada inteiro (pegue o número 3, por exemplo) é também um número racional com 1 como denominador (nesse caso $\frac{3}{1}$).

Não se sinta intimidado pelas diferentes classificações. Apenas marque esta página e volte quando precisar de um lembrete.

Exemplo 1: Identifique as categorias às quais o número 8 pertence.

Solução: Como não há nenhum sinal negativo na frente dele, 8 é um número positivo. Além disso, seus fatores são 1, 2, 4 e 8 (já que todos esses números são divisores de 8), o que nos indica que 8 é par e composto. Adicionalmente, é um número natural, um número inteiro, um número racional $\left(\frac{8}{1}\right)$ e um número real (8,0).

Você Tem Problemas

Problema 1: Identifique todas as categorias às quais o número $\frac{3}{7}$ pertence.

Sinais Trabalhosos

Antes de a álgebra surgir, só era esperado que você fizesse operações (como adição ou multiplicação) em inteiros positivos, mas agora é esperado que você realize as mesmas operações também em números negativos. Os procedimentos que você usa para adição e subtração são completamente diferentes do que aqueles para multiplicação e divisão, então os examinaremos separadamente.

Alerta do Kelley

A maioria dos livros escreve números negativos assim: -3. Porém, alguns escrevem assim: $^{-}3$. Ambos significam a mesma coisa, embora eu não use } esse sinal negativo estranho, nas alturas.

Adição e Subtração

No primeiro dia de uma das minhas aulas de estatística na faculdade, o professor nos perguntou "Quanto é 5 - 9?" A resposta que ele esperava, obviamente, era -4. Porém, o primeiro estudante a levantar a mão respondeu, inesperadamente: "Isso é impossível!", ele disse, "Você não pode tirar 9 maçãs de 5 maçãs — você não tem maçãs o suficiente!" Lembre-se que esse aluno era um veterano na faculdade, então, você pode imaginar o desespero do professor. É difícil aprender estatística avançada quando o aluno não entende álgebra básica.

Aqui vai um conselho: não pense em termos de maçãs, por mais gostosa que elas sejam. Ao invés disso, pense em termos de perder ou ganhar dinheiro — é algo que todos podem se identificar, e torna adições e subtrações positivas e negativas mais rápidas do que nunca. Se, ao terminar o problema, você ainda tem dinheiro, sua resposta é positiva. Se você está sem dinheiro e ainda deve, sua resposta é negativa.

Exemplo 2: Simplifique $5 - (-3) - (+2) + (-7)$.

Solução: Este é um exemplo perfeito de um problema de adição e subtração absolutamente terrível, mas se você seguir dois passos básicos, ele fica bastante simples.

1. **Elimine sinais duplos (sinais que não são separados por números).** Se dois sinais consecutivos são iguais, os substitua por um único sinal positivo. Se eles são diferentes, substitua-os por um único sinal negativo.

Ignore os parênteses por enquanto e trabalhe da esquerda para a direita. Você tem dois sinais negativos, um do lado do outro, entre o 5 e o 3. Uma vez que esses sinais consecutivos são os mesmos, substitua-os por um sinal positivo. Os outros dois pares de sinais consecutivos (entre o 3 e o 2 e, depois, entre o 2 e o 7) são diferentes, então, eles são substituídos por sinais negativos.

$$5 + 3 - 2 - 7$$

Agora que os sinais duplos foram eliminados, você pode seguir para o próximo passo.

2. **Para calcular a resposta final, considere todos os números positivos como dinheiro recebido e todos os números negativos como dinheiro gasto.** Lembre-se de que se não houver nenhum sinal antes de um número, este número é tido como positivo. (Como o 5, neste exemplo.)

Você pode ler o problema $5 + 3 - 2 - 7$ como "Eu ganhei cinco reais, depois mais três, mas aí gastei dois reais e depois mais sete". Você acaba com um total de perda de um real, ou seja, sua resposta é -1.

Repare que eu não descrevi técnicas diferentes para adição e subtração; isto porque subtração é apenas adição disfarçada — é basicamente adição de números negativos.

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique $6 + (+2) - (+5) - (-4)$.

Multiplicação e Divisão

Ao multiplicar e dividir números positivos e negativos, tudo o que você tem que fazer é seguir a mesma regra de ouro dos "sinais duplos", que você usou na adição e na subtração, só que com uma leve diferença. Se os dois números que você estiver multiplicando ou dividindo têm o mesmo sinal, então o resultado

será positivo, mas se eles possuem sinais diferentes, então, o resultado será negativo. É só isso.

Exemplo 3: Simplifique os seguintes:

a. $5 \times (-2)$

Solução: Como o 5 e o 2 têm sinais diferentes, o resultado será negativo. Apenas multiplique o 5 pelo 2 e coloque um sinal negativo na resposta: -10.

b. $-18 \div (-6)$

Solução: Neste problema, os sinais são os mesmos, então, a resposta será positiva: 3.

Você Tem Problemas

Problema 3: Simplifique:

a. $-5 \times (-8)$

b. $-20 \div 4$

Valores Opostos e Absolutos

Há duas coisas que você pode fazer a um número que mudará ou não o seu sinal: calcular o seu oposto ou calcular o seu valor absoluto. Apesar de essas duas coisas terem propósitos parecidos (e serem frequentemente confundidas), elas funcionam de maneiras completamente diferentes.

O *oposto* de um número é indicado por um único sinal negativo na frente dele. Por exemplo, o oposto de - 3 seria escrito assim: $-(-3)$. O valor do oposto de um número é simplesmente o número multiplicado por -1. Portanto, a única diferença entre o número e o seu oposto é o seu símbolo.

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \qquad -(4)=-4$$

Por sua vez, o *valor absoluto* de um número nem sempre tem um sinal diferente do número original. Valores absolutos são indicados por finas linhas verticais que cercam o número assim: $|-9|$. (Você lê isso como "o valor absoluto de -9".)

Fale a Linguagem

O **oposto** de um número tem o mesmo valor, mas com o sinal oposto de tal número. O **valor absoluto** de um número tem o mesmo valor, mas sempre será positivo.

Qual é o propósito do valor absoluto? Ele sempre retorna a versão positiva do que está dentro dele. Valores absolutos são um tipo de "removedores instantâneos de sinais negativos", e são tão eficientes que deveriam ter seu próprio comercial na televisão. ("A sua roupa tem sinais negativos insistentes que se recusam a sair?") Logo, $|-3|$ é igual a 3.

Repare que o valor absoluto de um número positivo é também positivo! Por exemplo, $|21| = 21$. Valores absolutos só retiram os sinais negativos se o número original não é negativo, então eles não têm efeito nenhum sobre ele.

Você Tem Problemas

Problema 4: Determine os valores de $-(8)$ e $|8|$.

Reúnam-se em Grupos

Os símbolos de valores absolutos que eu mencionei são apenas um exemplo de um *agrupamento algébrico.* Outros agrupamentos incluem (parênteses), [colchetes] e {chaves}. Esses símbolos cercam porções de um problema matemático, e o que aparece dentro deles são considerados agrupamento.

Ponto Crítico

Tecnicamente, uma barra de fração é também um agrupamento, porque ela separa a fração em dois grupos — o numerador e o denominador. Portanto, você deve simplificar as duas partes separadamente, no começo do problema.

Agrupamentos são importantes porque o ajudam a decidir o que fazer primeiro. Na verdade, há uma ordem bastante específica em que você deve simplificar expressões matemáticas, chamada de *ordem das operações*, que eu discutirei com mais detalhes no Capítulo 3. Até lá, lembre-se que qualquer coisa que aparecer dentro desses agrupamentos deve ser feita primeiramente.

Exemplo 4: Simplifique as expressões a seguir.

a. $15 \div \{7 - 2\}$

Solução: Como 7 – 2 aparecem entre chaves, você deve combinar esses números antes de dividir:

$$15 \div 5 = 3$$

b. $|5 - 3 + (-8)|$

Solução: Como há barras de valores absolutos presentes, você deve estar tentado a tirar todos os sinais negativos. Porém, eles estão dentro de um agrupamento, então, primeiramente, você deve simplificar a expressão. Elimine os sinais duplos e combine os números, como no Exemplo 2.

$$|5 - 3 - 8|$$

Trabalhe da esquerda para a direita, subtraindo $5 - 3$ primeiro.

$$=|2 - 8|$$
$$=|-6|$$

Agora que o conteúdo no singular foi completamente simplificado, você pode cuidar do valor absoluto: $|-6| = 6$.

c. $10 - [6 \times (2 + 1)]$

Solução: Nenhum agrupamento tem precedência sobre o outro. Por exemplo, você não faz sempre os colchetes antes das chaves. Entretanto, se mais de um agrupamento aparece em um problema, faça o mais interior antes, e depois continue.

Neste problema, os parênteses estão contidos dentro de outro agrupamento — os colchetes — fazendo com que os parênteses sejam os símbolos mais interiores.

Portanto, você deve simplificar primeiro $2 + 1$.

$$10 - [6 \times 3]$$

Apenas um agrupamento continua, os colchetes. Vá em frente e simplifique o conteúdo deles agora.

$$= 10 - 18$$

Tudo o que separa você e a alegria de uma resposta final é uma simples subtração, cuja resposta é - 8.

Você Tem Problemas

Problema 5: Simplifique:

a. $5 \times [4 - 2]$

b. $|2 - (16 \div 4)|$

Pressupostos Importantes

Só porque algo tem um nome complicado não significa que o conceito é necessariamente de difícil compreensão. Você já ouviu falar de hipopotomonstrosesquipedaliofobia?

Segundo a raiz da palavra, "fobia", é óbvio que é uma espécie de medo e, baseado no comprimento e na complexidade do nome, você pode pensar que é algum tipo de medo debilitante causado por um algum evento traumático, como descobrir que seu programa de televisão preferido foi substituído pelo horário eleitoral. (Esse é meu maior medo, pelo menos.)

Na verdade, hipopotomonstrosesquipedaliofobia significa "o medo de palavras grandes". Na minha experiência, se eles começam ou não a aula com esse medo, a maior parte dos alunos de álgebra acaba desenvolvendo-o durante algum ponto do curso. Você deve lutar contra isso! Apesar dos conceitos que irei apresentar terem nomes estranhos e complicados, eles representam ideias simples. Matemáticos, como a maioria dos profissionais, só dão nomes complicados às coisas que eles julgam mais importante.

Nesse caso, os conceitos importantes são propriedades algébricas (ou *axiomas*), pressupostos sobre as formas como os números funcionam e que não podem ser verificados através de provas matemáticas técnicas, mas são tão verdadeiros que o povo da matemática (que não costuma fazer coisas precipitadas) os assume como verdadeiros, apesar da falta de evidências. Mesmo que você não possa prová-los tecnicamente, é fácil de demonstrar o quão simples e óbvios eles são usando exemplos com números reais (o que eu faço nas amostras seguintes).

Fale a Linguagem

Uma propriedade algébrica (ou **axioma**) é um fato matemático tão óbvio, que é aceito sem provas.

Seu objetivo ao ler sobre essas prioridades é ser capaz de ligar o conceito ao nome, porque você verá essas propriedades serem usadas mais tarde neste livro.

Propriedade Associativa

É uma tendência natural as pessoas se separarem em grupos sociais diferentes, para que possam passar mais tempo com pessoas que têm os mesmos interesses que elas. Como um professor de ensino médio, eu ensino crianças de todas as panelinhas: as crianças do teatro, de bandas, os atletas, os C.D.F.S; todos estão representados. Entretanto, não importa como elas se associem entre si como um grupo, os alunos continuam os mesmos. O mesmo acontece com os números.

Não importa como os números se associem usando agrupamentos, seus valores não mudam (pelo menos na adição e na multiplicação). Considere o problema de adição

$$(3 + 5) + 9$$

O 3 e o 5 se juntaram, deixando o coitado do 9 sozinho, pensando se a culpa por ele ser um excluído social é do seu creme pós-barba. Se você simplificar esse problema de adição, você deve começar dentro dos parênteses, já que os agrupamentos sempre vêm antes.

$$8 + 9 = 17$$

Se eu deixar os números na mesma ordem exata ou, ao contrário, agrupar o 9 e o 5, o resultado será o mesmo.

$$3 + (5 + 9)$$

$$3 + 14 = 17$$

Isso é chamado de *propriedade associativa da adição*; em essência, significa que, dada uma sequência de números para ser adicionada, não importa qual você adicione primeiro — o resultado sempre será o mesmo. Como eu mencionei anteriormente, há também uma *propriedade associativa da multiplicação.* A resposta do problema de multiplicação $2 \times 6 \times 4$ não muda se você juntar os dois primeiros ou os dois últimos números juntos com parênteses.

$$(5 \times 6) \times 4 = 2 \times (6 \times 4)$$

$$12 \times 4 = 2 \times 24$$

$$48 = 48$$

ATENÇÃO

Alerta do Kelley

As operações de subtração e divisão não são associativas; adicionar grupos de símbolos em lugares distintos pode produzir resultados completamente diferentes. Só um exemplo, para provar que a divisão não é associativa:

$$(40 \div 10) \div 2 \neq 40 \div (10 \div 2)$$

$$4 \div 2 \neq 40 \div 5$$

$$2 \neq 8$$

Propriedade Comutativa

Diariamente, faço uma longa viagem até o trabalho — varia entre 75 e 120 minutos. Durante essas jornadas épicas, a cada manhã ou noite, fico frustrado com motoristas sem consideração que entram e saem das faixas de trânsito, só para ultrapassar um ou dois carros. Mesmo que eles fiquem 3 ou 6 metros à sua frente, você acaba os ultrapassando de qualquer forma. Com toda essa direção agressiva e perigosa, eles não ganham nada em troca. Moral da história: não importa a ordem dos carros viajantes, pois, geralmente, todos chegam ao trabalho na mesma hora. Os números já sabem que isso é verdade.

Quando você está adicionando ou multiplicando (mais uma vez, essa propriedade não se aplica à subtração ou à divisão), a ordem dos números não importa. Confira o problema de multiplicação

$$3 \times 2 \times 7$$

Se você multiplicar da esquerda para a direita, $3 \times 2 = 6$, e depois $6 \times 7 = 42$. Você sabia que também achará 42 se mudar a ordem dos números? Isso é chamado de *propriedade comutativa da multiplicação*. Precisa ver isso em ação? Então, vamos lá. (Não se esqueça de multiplicar da esquerda para a direita novamente).

$$7 \times 3 \times 2 = 21 \times 2 = 42$$

Alerta do Kelley

Segue um exemplo que mostra por que não existe a propriedade comutativa da subtração:

$$12 - 4 - 5 \neq 4 - 12 - 5$$
$$8 - 5 \neq -8 - 5$$
$$3 \neq -13$$

Lembre-se de que também existe a propriedade comutativa da adição:

$$5 + 19 + 4 = 19 + 4 + 5$$
$$24 + 4 = 23 + 5$$
$$28 = 28$$

Propriedades de Identidade

Tanto a adição quanto a multiplicação (coitada da subtração e da divisão — nada funciona para elas) têm números chamados *elementos identidade ou elemento neutro*, cuja função é (acredite ou não) deixar os inalterados. É isso mesmo — todo o trabalho deles é garantir que o número com que você começou não mude sua identidade até o problema acabar.

O elemento neutro da adição (chamado de *identidade aditiva*) é 0, porque se você adicionar 0 a qualquer número, terá o mesmo valor que começou.

$$3 + 0 = 3 \qquad \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \qquad -37 + 0 = -37$$

Bastante simples, não é? Você consegue dizer qual é a identidade multiplicativa? Qual é a única coisa que, se multiplicada por qualquer número, vai continuar sendo o número original? A resposta é 1; qualquer número vezes 1 é igual a ele mesmo.

$$9 \times 1 = 9 \qquad 4 \times 1 = 4 \qquad -10 \times 1 = -10$$

Os elementos neutros também são usados nas propriedades inversas.

Propriedades Inversas

O propósito das propriedades inversas é "cancelar" um número para obter um resultado final que seja igual ao elemento neutro da operação em questão. Isso parece complicado, mas quando você vir o que realmente significa, perceberá que é bastante simples:

- **Propriedade Inversa Aditiva:** Todo número tem um oposto, e adicionar um número ao seu oposto resultará no elemento neutro da adição, 0:

  $$2 + (-2) = 0 \qquad -7 + 7 = 0$$

- **Propriedade Inversa Multiplicativa:** Todo número tem um *inverso* definido como 1 dividido por aquele número. Quando você multiplica um número pelo seu inverso, terá o elemento de identidade multiplicativo, 1:

  $$5 \times \left(\frac{1}{5}\right) = 1 \qquad -6 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 1$$

Para entender a propriedade inversa multiplicativa, você precisa saber algumas coisas sobre frações. Se você tiver problemas com frações, não precisa entrar em pânico — o Capítulo 2 o ajudará a desenferrujar.

Você Tem Problemas

Problema 6: Dê o nome das propriedades matemáticas que garantem que as seguintes afirmações sejam verdadeiras.

a. $11 + 6 = 6 + 11$

b. $-9 + 9 = 0$

c. $(1 \times 5) \times 7 = 1 \times (5 \times 7)$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Números podem ser classificados de várias maneiras diferentes, baseadas em suas características, que variam desde sua divisibilidade a se podem ou não serem escritos como uma fração.
- A técnica usada para lidar com sinais positivos e negativos em problemas de adição e subtração é um pouco diferente da técnica usada para lidar com eles em problemas de multiplicação e divisão.
- Você deve sempre calcular primeiro o valor das expressões dentro dos agrupamentos.
- Sinais de valor absoluto dão a versão positiva do seu conteúdo.
- Propriedades matemáticas são fatos importantes (apesar de não terem provas), que descrevem verdades matemáticas intuitivas.

Capítulo 2

Fazendo Amizade com as Frações

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Entender as frações como elas são
- Escrever frações de formas diferentes
- Simplificar frações
- Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações

Poucas palavras têm o poder inato de assustar pessoas como a palavra "fração". Sair dos números regulares para falar sobre números estranhos, compostos por dois outros números costurados juntos, é um pulo gigantesco! Professores de matemática atualmente passam bastante tempo apresentando este conceito para jovens alunos, usando blocos de brinquedo e jogos educacionais para modelar frações fisicamente, mas alguns ainda mantêm o velho método de ensinar (como a maioria dos meus professores), que é basicamente apresentar o tópico sem explicações e depois fazer você se sentir constrangido se tiver alguma pergunta ou não tiver entendido.

Neste capítulo, eu o ajudarei a revisar suas habilidades em frações, e prometo não importuná-lo, caso você tenha que reler algumas vezes até entender. Ao longo do livro (e especialmente nos capítulos 17 e 18), você lidará com frações muito complicadas, que contêm variáveis, então, você deve aperfeiçoar suas habilidades básicas de fração agora, enquanto há apenas números dentro delas.

O que é uma Fração?

Há três formas de pensar em frações, todas igualmente precisas, e cada uma nos dá uma visão diferente de como funciona uma fração. Em essência, uma fração é:

- **Um problema de divisão congelado no tempo.** Uma fração é apenas um problema de divisão escrito verticalmente, com uma barra de fração ao invés de uma barra horizontal como símbolo de divisão; por exemplo, você pode reescrever $5 \div 7$ como $\frac{5}{7}$. Essas duas formas representam exatamente a mesma coisa, apesar de elas parecerem diferentes.

  Por que, então, você usaria frações? Bem, não é nenhuma surpresa que a resposta para $5 \div 7$ não é um número simples, como 2. Em vez disso, é um valor decimal bastante feio. Para poupá-lo da frustração de escrever um monte de casas decimais e, depois, da angústia mental de olhar para uma monstruosidade tão horrenda, deixamos o problema da divisão congelado no tempo em forma de fração.

- **Uma parte de um número ou um conjunto inteiro.** Desde que a número de cima em uma fração seja menor que o número de baixo, a fração tem um (provavelmente horroroso) valor decimal menor que um. "Um o quê?" você pode perguntar. Depende. Por exemplo, se você tem 7 ovos que sobraram de uma dúzia que você comprou domingo no supermercado, pode dizer corretamente que tem $\frac{7}{12}$ (leia-se "sete doze avos") de uma dúzia. Da mesma forma, 3 colheres de chá são iguais a uma colher de sopa, se uma receita pede 2 colheres de chá, essa quantia é igual a $\frac{7}{12}$ (leia-se "dois terços") de uma colher de sopa.

  Quando consideramos a fração como uma porção de um conjunto inteiro, o número de cima representa quantos itens estão presentes, e o número de baixo representa quando itens fazem um conjunto completo.

- **Uma tentativa falha de marketing.** No final do século XVIII, a popularidade da matemática começou a diminuir. E então, em uma tentativa desesperada de aumentar a popularidade dos números, cientistas "aumentaram-os", criando frações que incluem dois números pelo preço de um. Isso foi um

fracasso total, e matemáticos foram eternamente excluídos da alta sociedade e forçados a usar óculos grudados com fita adesiva. Por sinal, essa última pode não ser verdade – eu acho que sonhei com isso.

A propósito, o nome matemático pomposo para a parte de cima da fração é *numerador*; e a parte de baixo é chamada de *denominador*.

$$\frac{\text{NU}\textit{merador}}{\text{DE}\textit{nominador}}$$

Fale a Linguagem

A parte de cima de uma fração é o **numerador** e a parte de baixo é um **denominador**.

As duas primeiras letras das palavras NUmerador e DEnominador, de cima para baixo, revelam todos os mistérios das frações: NUDE!

Formas de Escrever Frações

Você pode achar o valor decimal real de uma fração ao dividir o numerador pelo denominador, acabando efetivamente com o problema da divisão congelada. Uma calculadora dará a resposta mais rapidamente, mas, se você é uma dessas pessoas que insistem em fazer as coisas à moda antiga, a divisão manual também funciona. Por exemplo, o valor decimal de $\frac{7}{12}$ é igual a $7 \div 12$, que é 0.5833333... Repare que o dígito 3 se repetirá infinitamente. Qualquer dígito ou dígitos em um decimal que se comporte dessa forma pode ser escrito com uma barra em cima dele, como em: $0{,}58\overline{3}$. Essa barra significa "qualquer coisa aqui embaixo se repete infinitas vezes".

Algumas frações, chamadas de *frações impróprias*, têm numeradores maiores que seus denominadores, como $\frac{14}{5}$. Pense nessa fração como um apanhado de elementos (como eu descrevi na sessão anterior): você tem 14 itens, e são necessários apenas 5 para completar um conjunto. Logo, você tem o suficiente para dois conjuntos (que requerem 10) mas não o suficiente para 3 conjuntos completos (que exigiriam 15). Então, o valor decimal de $\frac{14}{5}$ é algo entre 2 e 3 (mas é mais próximo de 3 do que de 2).

Fale a Linguagem

Se o numerador é maior que o denominador, então você tem uma **fração imprópria**, que pode permanecer como está ou ser transformada em um **número misto** – que possui tanto um inteiro como a parte da fração. Se o numerador é menor que o denominador, então é uma **fração própria**.

Por sinal, frações cujos numeradores são menores que seus denominadores são chamadas de *frações próprias*.

Todas as frações impróprias podem ser escritas com *números mistos*, que possuem tanto um inteiro como a parte da fração e permitem uma melhor visualização do valor real da fração. A fração imprópria $\frac{14}{5}$ corresponde ao número misto $2\frac{4}{5}$.

Veja, a seguir, como cheguei a esse número:

1. Divida o numerador pelo denominador. Neste caso, 14 ÷ 5 que resulta em 2 e sobra 4. Matematicamente, você chama o 2 de *quociente* e o 4 de *resto*.
2. O quociente será a parte inteira do número misto (o número grande na frente). A parte da fração do número misto será o resto dividido pelo denominador original da fração imprópria.

A maioria dos professores prefere que você deixe como resposta uma fração imprópria do que escrevê-la como um número misto, apesar do nome "fração imprópria" implicar que, de alguma forma, é errada ou está violando as boas maneiras.

Ponto Crítico

Para converter um número misto em uma fração imprópria, tudo o quê você precisa fazer é adicionar o inteiro na parte da fração. Em outras palavras, $2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$. Se você não sabe como adicionar frações a inteiros, eu explicarei depois, neste capítulo (veja a sessão "Adicionando e Subtraindo Frações").

Simplificando Frações

Fale a Linguagem

Quando não há mais fatores comuns restantes entre o numerador e o denominador, dizemos que a fração está em sua **forma simplificada**. O processo de eliminar os fatores comuns é chamado de simplificação ou redução da fração.

Você sabia que frações não precisam ser parecidas para serem iguais? Eu gostaria que isso também fosse verdade para humanos, porque, às vezes, eu poderia ser confundido com o George Clooney. Porém, não é verdade, e eu estou condenado a ser eternamente comparado com um mar de outros caras meio carecas e barrigudos como eu.

Frações equivalentes (ou iguais) podem tomar uma série de formas, por isso, a maior parte dos instrutores exige que você ponha a fração na *forma simplificada*, o que significa

que o numerador e o denominador não têm nenhum fator em comum. Toda fração tem uma única forma simplificada, que você pode atingir ao dividir esses fatores comuns.

Exemplo 1: Simplifique a fração $\frac{24}{36}$.

Solução: 24 e 36 possuem algum fator em comum? Claro – ambos são pares, para começar. E então, eles têm o 2 como fator comum. Divida as duas partes da fração por 2, na tentativa de simplificá-la, e você obterá $\frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18}$. Porém, você ainda não acabou! Esta fração ainda pode ser mais simplificada, porque tanto o numerador quanto o denominador podem ser igualmente divididos por 6; dividindo pelo fator comum, você terá $\frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$. Você agora terminou, porque o 2 e o 3 não são divididos por nenhum fator comum (além do número 1, que é um fator para todos os números).

A propósito, apesar de eu ter simplificado esta fração em dois passos, você poderia ter feito em um único passo, se percebesse que o 12 é o *máximo divisor comum* entre 24 e 36. Se você dividir os dois números pelo máximo divisor comum, você simplifica a fração em um passo; nesse caso, você terá imediatamente a resposta $\frac{2}{3}$.

Fale a Linguagem

O maior fator que dois números têm em comum é chamado (previsivelmente) de **máximo divisor comum**, e tem a abreviação MDC.

Se você não está convencido de que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{24}{36}$ são apenas duas representações do mesmo valor, converta-as em decimais. Você verá que, ambas, são exatamente iguais a 0,6, evidência conclusiva de que elas são equivalentes!

Você Tem Problemas

Problema 1: Simplifique as frações e identifique o máximo divisor comum do numerador e denominador.

a. $\frac{7}{21}$

b. $\frac{24}{40}$

Localizando o Mínimo Múltiplo Comum

Algumas vezes não é útil simplificar frações completamente. Em alguns casos (que eu discutirei com mais detalhes no próximo capítulo), você quererá reescrever frações só para elas terem o mesmo denominador, em vez de serem totalmente simplificadas.

Isso não é tão difícil quanto parece. Lembre-se que frações (como $\frac{2}{3}$ e $\frac{24}{36}$) podem parecer drasticamente diferentes, mas têm o mesmo valor real.

A parte complicada de reescrever frações, para terem denominadores comuns (iguais), é descobrir exatamente qual é esse denominador comum. No entanto, se você seguir estes passos, identificar o denominador comum não será nenhum desafio para você:

1. Examine os denominadores de todas as frações. Escolha o maior do grupo. De brincadeira, chamarei esse maior denominador de Grandão.
2. Todos os outros denominadores menores são divisíveis pelo Grandão? Se sim, então Grandão é o seu menor denominador comum. Se não, siga para o terceiro passo.
3. Multiplique o Grandão por 2. Agora, todos os outros denominadores são divisíveis pelo Grandão? Se não, multiplique o Grandão por 3 e veja se funciona. Se não, continue multiplicando o Grandão por números maiores e maiores até que os denominadores se tornem divisíveis por esse garotão.

Esse procedimento não gerará apenas um denominar comum, ele também apontará o menor, chamado de *mínimo múltiplo comum* (abreviado como MMC).

ATENÇÃO

Alerta do Kelley

Alguns alunos jogam a toalha ao calcular um denominador comum; ao invés de seguir meu simples procedimento de três passos, eles multiplicam todos os denominadores juntos. Por exemplo, para achar um denominador comum para as frações $\frac{7}{200}$, $\frac{13}{100}$ e $-\frac{8}{50}$, eles multiplicam $200 \times 100 \times 50 = 1.000.000$, um denominador comum gigante!

Apesar de ser um denominador comum válido, ele certamente não é o menor. Usando a minha técnica, 200 é o maior denominador comum (por isso é chamado de Grandão) e os outros denominadores (100 e 50) são divisíveis pelo Grandão; logo, ele é o menor denominador comum. Eu não sei você, mas eu prefiro lidar com um denominador de 200 a um que é 5.000 vezes maior!

Depois que tiver calculado o mínimo múltiplo comum, você já está na metade do caminho. Você ainda tem que reescrever as frações, para que elas contenham seus denominadores comuns novinhos e brilhantes. Veja aqui como fazer:

1. Divida o mínimo múltiplo comum pelo denominador de cada fração (todos serão divisíveis).
2. Multiplique o resultado obtido de cada divisão pelo numerador e denominador de cada fração correspondente. Aposto que esse processo parece intimidador. Ele requer um pouco de prática para se tornar natural para você, mas (como você verá nos próximos exemplos) não tem nenhum passo que seja excessivamente complicado.

Exemplo 2: Reescreva as frações de forma que elas tenham o menor denominador comum.

a. $\frac{1}{3}, \frac{7}{15}$

Solução: Primeiro, procure o maior denominador (Grandão): 15. Já que o outro denominador (3) é divisível por 15, isso faz com que o 15 seja o mínimo múltiplo comum, o que é bastante prático – a segunda fração não precisará ser reescrita. No entanto, a primeira fração precisa ser alterada, para também ter um denominador de 15.

Para reescrever a primeira fração, divida o mínimo múltiplo comum pelo denominador (15 ÷ 3) e multiplique o resultado (5) pelo numerador e denominador da fração.

$$\frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

Repare que a nova fração não está em forma simplificada (se você fosse simplificá-la, ela voltaria para a mesma que começamos, $\frac{1}{3}$). Suas frações finais, agora com os denominadores comuns, são $\frac{5}{15}$ e $\frac{7}{15}$.

Como Eles Fazem Isso?

Quando você multiplica o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, é como se você estivesse multiplicando por 1, o quê não afetará o valor da fração, porque 1 é a identidade multiplicativa. Isso significa que a fração original $\left(\frac{1}{3}\right)$ e a final $\left(\frac{5}{15}\right)$ têm o mesmo valor.

b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$

Solução: O Grandão é igual a 4 neste conjunto de frações. Apesar de o 2 ser divisível pelo Grandão, o 3 não é. Então, multiplique o Grandão por 2 (4×2) para obter 8. Teimosamente, o 3 *ainda* não será divisível por 8. Enfim, pro alto e avante. Agora multiplique o Grandão por 3 (4×3) para ter 12. Todos os denominadores são divisíveis por 12; então, 12 é o mínimo múltiplo comum.

Para terminar o problema, você tem que multiplicar o numerador e o denominador de cada fração pelo número apropriado. (Lembre-se de que esse número é o resultado da divisão entre o mínimo múltiplo comum, 12, pelo denominador individual da fração.)

$$\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12} \qquad \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12} \qquad \frac{3 \times 3}{2 \times 6} = \frac{9}{12}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Reescreva as frações seguintes usando o mínimo múltiplo comum

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10}$$

Operações com Frações

Agora que você tem conhecimentos básicos sobre o que são frações e como pode manipulá-las, é hora de começar a combiná-las, usando as quatro operações aritméticas básicas.

Adicionando e Subtraindo Frações

Caso você esteja pensando porque eu gastei tanto tempo discutindo denominadores comuns, você irá descobrir o porquê. (Não é emocionante?) Acontece que *você só pode adicionar ou subtrair frações se elas possuem denominadores comuns*. Se eu ganhasse 25 centavos toda vez que um aluno meu visse o problema $\frac{2}{3} + \frac{9}{11}$ e adicionasse os numeradores e denominadores e respondesse

$\frac{11}{14}$, eu poderia não ser um homem rico, mas poderia passar a maior parte do meu fim de semana de três dias jogando totó.

Veja como é o modo correto de adicionar e subtrair frações:

1. Escreva as frações usando um denominador comum. (Se for adicionar uma fração a um inteiro, escreva o inteiro como uma fração dividindo-o por 1, antes de achar o denominador comum)
2. Adicione os numeradores das frações e escreva o resultado sobre o denominador comum.
3. Se necessário, simplifique a fração.

   A parte mais difícil de todo o processo é encontrar o denominador comum, e como você já sabe fazer isso, essa coisa de fração é moleza!

Exemplo 3: Combine as frações como indicado e escreva a resposta de forma simplificada.

a. $\frac{3}{4} - \frac{8}{3}$

Solução: Apesar de uma dessas frações ser imprópria, você não precisará fazer nada diferente. Comece reescrevendo as frações com o menor denominador comum 12.

Ponto Crítico

A resposta para 3 (a) pode ser escrita de três formas diferentes, todas corretas: $-\frac{23}{12}, \frac{-23}{12}$ ou $\frac{23}{-12}$. O mesmo vale para qualquer fração negativa; todas essas formas são equivalentes.

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{8 \times 4}{3 \times 4} = \frac{9}{12} - \frac{32}{12}$$

Subtraia os numeradores e escreva o resultado em cima do denominador comum.

$$\frac{9 - 32}{12} = \frac{-23}{12}$$

Já que 23 é um número primo, não haverá nenhum fator em comum com 12, então, não há como simplificar a fração.

b. $2 + \frac{4}{5} + \frac{7}{10}$

Solução: Comece reescrevendo o 2 como uma fração. (Todos os inteiros têm como denominador invisível o número 1.)

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}$$

Reescreva as frações usando o menor denominador comum, 10.

$$=\frac{2\times 10}{1\times 10}+\frac{4\times 2}{5\times 2}+\frac{7}{10}$$
$$=\frac{20}{10}+\frac{8}{10}+\frac{7}{10}$$

Adicione os numeradores e divida a resposta pelo denominador comum.

$$=\frac{20+8+7}{10}$$
$$=\frac{35}{10}$$

Simplifique a fração, dividindo ambos os números pelo maior fator em comum, 5.

$$=\frac{7}{2}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Combine as frações e escreva a resposta de forma simplificada.

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$$

Multiplicando Frações

Embora seja uma pena não poder adicionar duas frações apenas somando seus respectivos numeradores e denominadores, é uma boa surpresa saber que a multiplicação é fácil assim. Você leu certo! Tudo que você tem que fazer é multiplicar todos os numeradores e escrever o resultado em cima dos denominadores multiplicados.

Exemplo 4: Multiplique as frações e escreva a resposta de forma simplificada.

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{8}{9}$$

Solução: Multiplique os numeradores, e faça o mesmo com os denominadores.

$$1 \times 3 \times 8 = 24 \qquad 2 \times 5 \times 9 = 90$$

A resposta é o produto dos numeradores dividido pelo produto dos denominadores. Certifique-se de simplificar, usando o máximo divisor comum, 6.

$$\frac{24}{90} = \frac{24 \div 6}{90 \div 6} = \frac{4}{15}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Multiplique e escreva a resposta de forma simplificada.

$$\frac{5}{6} \times 8 \times \frac{3}{20}$$

Dividindo Frações

No Capítulo 1, você aprendeu que cada número tem um inverso. Naquela ocasião, eu disse a você que o inverso era apenas 1 dividido pelo número. Por exemplo, o inverso de 8 é $\frac{1}{8}$.

E se, entretanto, você quiser saber o inverso de uma fração? O inverso de $\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{1}{3/5}$? Essa coisa horrorosa é chamada de fração complexa, e eu falarei sobre isso bem mais à frente, no Capítulo 17.

Por enquanto, você deve se lembrar disso: *O inverso de uma fração é formado ao inverter as partes de uma fração* (o numerador se torna o denominador e vice versa). Por exemplo, o inverso de $\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{5}{3}$, a fração virou de cabeça pra baixo. (É fácil lembrar-se da palavra "inverso", nesse caso).

Você está se perguntando por que eu estou trazendo inversos à tona novamente? Aqui está o porquê: dividir uma fração é exatamente a mesma coisa que multiplicá-la pelo seu inverso. Então, dividir um número por $\frac{3}{5}$ é a mesma coisa que multiplicá-lo por $\frac{5}{3}$.

Exemplo 5: Divida as frações e escreva o resultado de forma simplificada.

$$-\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}$$

Solução: Não se desespere com o sinal de negativo, apesar de serem frações, são apenas números, e as regras usadas no Capítulo 1 ainda são aplicáveis. (Porque as frações têm sinais diferentes, o resultado será negativo.) Enquanto isso, para resolver o problema, pegue o inverso do número que você está dividindo e mude o sinal de divisão para o de multiplicação.

$$-\frac{3}{4} \times \frac{16}{5}$$

Tudo o quê sobrou é um problema fácil de multiplicação, e você já sabe como fazer isso.

$$= -\frac{3 \times 16}{4 \times 5} = -\frac{48}{20} = -\frac{48 \div 4}{20 \div 4} = -\frac{12}{5}$$

Antes deste capítulo sobre frações acabar, deixe-me oferecer um exemplo de problema que vai realmente provar se você está dominando frações ou não. Ele vai testar algumas habilidades de uma só vez.

Você Tem Problemas

Problema 5: Escreva o resultado como uma fração simplificada.

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{7}\right) \div \frac{1}{7}$$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- A parte de cima de uma fração é chamada de numerador e a parte de baixo é chamada de denominador.
- Se uma fração está em sua forma simplificada, seu numerador e seu denominador não têm fatores comuns.
- Para adicionar ou subtrair uma fração, todas devem ter um denominador comum.
- Inverta o numerador e o denominador de uma fração para criar o seu inverso.
- Dividir uma fração é o mesmo que multiplicá-la pelo seu inverso.

Capítulo 3

Encontrando Expressões

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Representar números com variáveis
- Simplificar expressões matemáticas complexas
- Liberar a potência dos expoentes
- Realizar operações na ordem correta

A hora fatídica chegou. A tensão paira pesada no ar, como uma gaivota grande e gorda. O mundo, como um todo, prende a respiração, enquanto a população entende, apenas inconscientemente, que alguma coisa importante está prestes a acontecer. Criancinhas olham o horizonte com expectativa, tentando vislumbrar o que está por vir. Cães latem incessantemente, enquanto se esforçam a correr em suas coleiras, sentindo o cheiro de revolução no ar. Nerds de todos os lugares param de memorizar diálogos de *Monty Python* por um momento, sentindo a evolução matemática.

Que tal isso como desenvolvimento dramático? Talvez um pouco exagerado, mas tudo que você costumava saber sobre matemática vai mudar, então achei adequado. Deste ponto em diante, todo capítulo terá conteúdo um pouco menos familiar, e você será removido ainda mais do mundo amigável dos números e da aritmética. É hora de ser algebratizado.

Respire fundo e navegue comigo nas águas frias, mas rasas, das expressões algébricas. Passaremos um tempinho com águas matemáticas nos joelhos durante este capítulo, mas daqui a pouco você estará nadando em águas muito fundas para ficar em pé, e pensará por que achou que isso nunca seria possível.

Introduzindo Variáveis

Uma *variável* é uma letra que representa um número; ela funciona como um pronome em português. Ao invés de falar "Dave é um cara engraçado, porque Dave faz uma imitação idêntica da avó do Dave", é muito mais natural dizer "Dave é um cara engraçado, porque *ele* faz uma imitação idêntica da avó *dele*". Os pronomes *ele* e *dele* estão claramente se referindo a Dave, não havendo nenhuma confusão por parte do leitor, e a segunda frase soa muito mais natural.

Você se lembra da técnica que eu tracei ao calcular o mínimo múltiplo comum, no Capítulo 2? Eu chamei o maior denominador original de *Grandão*, que é, na verdade, uma variável (apesar de variáveis geralmente serem letras, não apelidos). Uma vez que eu defini o *Grandão*, encurtei minha explicação usando o poder total das variáveis como em: "Eu chamarei o maior denominador de *Grandão* e os outros denominadores de a e b (não importa qual é qual). Se tanto a quanto b são divisíveis pelo *Grandão*, então *Grandão* é o menor denominador comum. Se não, calcule 2 × *Grandão*, e veja se o a e o b são divisíveis por ele. Se não são, tente 3 × *Grandão*, depois 4 × *Grandão*, e assim sucessivamente, até você encontrar um número que seja divisível por a e b."

Viu como é mais fácil falar "2 × *Grandão*" do que "duas vezes o maior denominador – o qual você identificou no passo anterior"? Além de simplificar as coisas, as variáveis servem a outro propósito importante – elas permitem que você fale de forma bastante precisa. Precisão é importante para matemáticos, que não querem nenhuma confusão em suas explicações.

Ponto Crítico

Neste livro (como em todos os livros de matemática), as variáveis estão em itálico, para que se diferenciem das palavras e números que as cercam.

No Capítulo 2, eu descrevi o inverso de uma fração como uma fração de cabeça para baixo. Variáveis permitem uma explicação mais precisa: "O inverso de uma fração $\frac{a}{b}$ (sendo que a e b são inteiros) é a fração $\frac{b}{a}$." Não tenho necessidade de falar "o antigo numerador se transforma no novo denominador", porque você pode ver o antigo numerador, a, de fato se tornando o novo denominador.

Como elas são úteis, alguns professores de matemática acabam usando variáveis excessivamente. Enquanto elas podem fornecer definições mais curtas e concisas, também são mais confusas de se entender, especialmente para novos alunos de álgebra. Por isso, eu sempre acompanharei fórmulas, variáveis e definições de uma explicação simples em português, para que você possa entender o que toda essa linguagem matemática densa significa.

Traduzindo Palavras em Matemática

Não é nenhuma surpresa que variáveis gostem de agir como pronomes, porque (acredite ou não) matemática é basicamente sua própria língua, definida por regras lógicas e numéricas. Por essa razão, é uma das primeiras habilidades que você deve dominar ao traduzir português nessa nova (e muito mais nerd) linguagem matemática. Por enquanto, você traduzirá frases em português para frases matemáticas, chamadas de *expressões*.

As expressões que você traduzirá são bastante diretas. Por exemplo, a frase "3 mais um número desconhecido" se torna a expressão matemática "$x + 3$". Porque o número desconhecido não tem nenhum valor explícito definido, você apenas o rotula usando a variável x. Para obter um valor 3 mais o x, simplesmente adicione 3 a ele. Se isso é complicado para você, pense em exemplos com números reais. Pergunte-se a si mesmo "Quanto é 3 mais o número 7?". A resposta obviamente é 10, e você terá a resposta pela expressão "$7 + 3 = 10$". Então, para ter 3 mais um número desconhecido, substitua o número conhecido 7 por um número desconhecido x.

Neste exemplo de tradução, a palavra chave foi "mais", porque indica que a adição será necessária. Cada operação tem sua palavra de sinalização, e farei uma lista delas aqui, com um exemplo para cada uma:

Alerta do Kelley

A subtração não é comutativa, por isso tome cuidado na ordem correta dos números. Repare que "5 menos um número" e "5 menor que um número" significam coisas completamente diferentes.

Ponto Crítico

Se não há nenhum símbolo escrito entre duas coisas, a multiplicação está implícita. Logo, $5y$ significa "5 vezes y" e $2(x + 1)$ significa "2 vezes a expressão $(x + 1)$". A partir daqui, usarei também o símbolo "·" para indicar multiplicação, porque é muito fácil confundir o outro símbolo da multiplicação, x, com a variável x.

Adição

- *Mais/maior que*: "11 mais um número" significa "$x + 11$"
- *Soma*: "A soma de um número e 6" significa "$x + 6$"

Subtração

- *Menos/menor que*: "um número menos 7" significa "$x - 7$"
- *Menos*: "17 menos que um número" significa "$17 - x$"
- *Diferença*: "A diferença de um número e 6" significa "$x - 6$"

Multiplicação

- Produto: "O produto de um número e 3" significa "$x \cdot 3$" ou "$3x$" (porque a multiplicação é comutativa, não importa a ordem que os números estão escritos)
- De: "Metade de 20" significa "$\frac{1}{2} \cdot 20$"

Divisão

- *Quociente*: "O quociente de 10 e um número" significa "$10 \div x$"
- *Frações*: Qualquer expressão escrita como uma fração é tecnicamente um problema de divisão disfarçado

Exemplo 1: Traduza as frases a seguir em expressões matemáticas:

a. A soma de 6 e duas vezes um número

   Solução: A frase "duas vezes um número" é traduzida como $2x$ (Pense nisso: duas vezes o número 8 seria $2 \cdot 8 = 16$). A palavra "soma" indica que você deve adicionar 6 e $2x$ para obter uma resposta final, que é $6 + 2x$.

b. O produto de 2 e 3 mais um número

   Solução: Você pode estar tentado a dar como resposta $2 \cdot x + 3$, mas isto é igual a $2x + 3$, ou "3 mais duas vezes um número". Você precisa usar parênteses para deixar o $x + 3$ juntos, como em: $2(x + 3)$. Agora, 2 é multiplicado pelo total de $x + 3$, e não apenas por x.

Você Tem Problemas

Problema 1: Traduza a frase "5 menos de um terço de um número" em uma expressão matemática.

Contemplando a Potência dos Expoentes

Você já deve ter visto pequenos números flutuando à direita e em cima de outros números e variáveis, como na expressão x^3. O que esse 3 pequenininho está fazendo ali? Parapente? E ele é pequeno por causa do tamanho, ou talvez porque ele na verdade é grande como o Sol, mas só é visto a centenas de milhares de quilômetros de distância? Não, esse carinha é chamado de expoente ou a potência de x na expressão e, de fato, ele tem um papel potente na álgebra.

Fale a Linguagem

Na expressão exponencial y^4, 4 é o **expoente** e y é a base.

Grandes Coisas Vêm em Pacotes Pequenos

Um expoente tem o papel de poupar o seu tempo e limpar o modo que as expressões são escritas. Basicamente, um expoente é uma forma abreviada de indicar multiplicações repetidas. Na linguagem da álgebra, x^3 (leia-se "x elevado ao cubo") significa "x multiplicado por si mesmo três vezes", ou $x \cdot x \cdot x$. Você multiplica a base (o número grande) por ela mesma quantas vezes o expoente indicar.

Ponto Crítico

Dois expoentes têm nomes especiais. Qualquer coisa elevada à segunda potência é dita **ao quadrado** (5^2 pode ser lido "5 ao quadrado") e qualquer coisa à terceira potência é dita **ao cubo** (x^3 pode ser lido "x ao cubo").

Exemplo 2: Calcule as expressões exponenciais:

a. 4^3

Solução: Nesta expressão, 4 é a base e 3 é o expoente. Para achar a resposta, multiplique 4 por ele mesmo 3 vezes:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

b. $(-2)^5$

Solução: Neste caso, a base é -2, e ela deve ser multiplicada por ela mesma 5 vezes.

$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$$

Não se estresse com os sinais negativos – só vá da esquerda para a direita e multiplique dois números de cada vez. Comece por $(-2)(-2) = 4$ e depois multiplique o resultado pelo próximo -2, este resultado pelo próximo -2 e assim por diante.

$$(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 4(-2)(-2)(-2) = -8(-2)(-2) = 16(-2) = -32$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule a expressão $(-3)^4$.

Regras Exponenciais

Depois que você escreveu algo na forma exponencial, há algumas regras bastante específicas que você deve seguir para simplificar essas expressões. Veja as cinco regras mais importantes, cada uma com uma breve explicação:

Ponto Crítico

Qualquer número elevado a 1 é igual ao número original ($x^1 = x$); então, se não há nenhuma potência escrita, assumimos que a potência seja 1 ($7 = 7^1$). Na adição, qualquer coisa (exceto 0) elevada a 0 potência é igual a 1 ($x^0 = 1$, $12^0 = 1$). A expressão 0^0 funciona de forma diferente, mas você só terá que lidar com isto em cálculo.

- **Regra 1:** $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. Se expressões exponenciais com a mesma base são multiplicadas, o resultado é a base comum elevada à *soma* das potências.

  $$x^4 \cdot x^7 = x^{4+7} = x^{11} \qquad (2^2)(2^3) = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

- **Regra 2:** $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$. Se você está dividindo expressões exponenciais com a mesma base, o resultado é a base comum elevada à *diferença* das duas potências.

  $$\frac{z^7}{z^4} = z^{7-4} = z^3 \qquad \frac{(-5)^{10}}{(-5)^9} = (-5)^{10-9} = (-5)^1 = -5$$

- **Regra 3:** $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$. Se uma expressão exponencial é ela mesma elevada à uma potência, multiplique os expoentes. Ela é diferente da Regra 1 porque, aqui, uma base é elevada a duas potências, e na Regra 1 há duas bases elevadas à duas potências.

  $$(3^5)^6 = 2^{5 \cdot 6} = 3^{30} \qquad (k^2)^0 = k^{2 \cdot 0} = k^0 = 1$$

- **Regra 4:** $(xy)^a = x^a y^a$ e $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$. Se um produto (problema de multiplicação) ou um quociente (problema de divisão) é elevado a uma potência, logo, todos os termos dentro deles também devem ser elevadas.

  $$(5y)^2 = 5^2 \cdot y^2 = 25y^2 \qquad (x^2 y^3)^4 = (x^2)^4 \,.\, (y^3)^4 = x^8 y^{12}$$

- **Regra 5:** $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$ e $\dfrac{1}{x^{-a}} = x^a$. Se alguma coisa é elevada a uma potência negativa, mova-a para a outra parte da fração (se ela está no numerador,

mande-a para o denominador, e vice-versa) e transforme o expoente em positivo. Se a expressão tem outros expoentes positivos, então, deixe-a em paz.

A maioria dos professores considera respostas com expoentes negativos como não simplificadas, então, certifique-se de eliminar os expoentes negativos da sua resposta final. Também, repare que elevar alguma coisa à potência –1 é o mesmo que calcular o seu inverso.

$$\frac{x^{-3}y^2}{z^3}=\frac{y^2}{x^3z^3} \qquad \left(\frac{4^2}{w^5}\right)^{-1}=\frac{4^{2(-1)}}{w^{5(-1)}}=\frac{4^{-2}}{w^{-5}}=\frac{w^5}{4^2}=\frac{w^5}{16}$$

Na maioria das vezes, você terá que aplicar múltiplas regras no mesmo problema (como no próximo exemplo).

Exemplo 3: Simplifique a expressão $\frac{\left(x^2y^{-3}\right)^2}{\left(xy^2\right)^4}$

Solução: Comece aplicando as Regras 3 e 4 ao numerador e ao denominador.

$$\frac{x^{2\cdot 2}y^{-3\cdot 2}}{x^{1\cdot 4}y^{2\cdot 4}}=\frac{x^4y^{-6}}{x^4y^8}$$

Agora, aplique a Regra 2, porque você tem bases iguais no numerador e no denominador.

$$\left(x^{4-4}\right)\left(y^{-6-8}\right)=x^0y^{-14}=1\cdot y^{-14}=y^{-14}$$

Termine aplicando a Regra 5.

$$y^{-14}=\frac{1}{y^{14}}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Simplifique a expressão $\left(x^3y\right)^5\left(x^{-2}y^2\right)^3$.

Aproveitando a Vida com Notações Científicas

Você já teve um cubo mágico? É um pequeno quebra-cabeças com seis lados de cores diferentes. Segundo o fabricante, há 43 quintilhões de movimentos possíveis diferentes (eu provavelmente tentei todos, sem sucesso, para resolver). Caso você não saiba quanto é um quintilhão (eu também tive que verificar), este é o número: 43.000.000.000.000.000.000.

Números tão grandes assim, com todos esses zeros, são geralmente escritos em *notação científica* – um método usado para expressar números que são extremamente grandes ou extremamente pequenos. Veja como esse número fica na forma científica: $4{,}3 \times 10^{19}$. Claro que ele é estranho, mas é bem mais fácil de ser escrito.

Para expressar um número em notação científica, eis o que você deve fazer:

- **Números grandes**: Mova a vírgula decimal no número de origem para a esquerda, contando cada dígito que você passar, até que apenas um número que não seja zero sobre do lado esquerdo da vírgula decimal. Escreva o menor decimal (ignorando qualquer 0 no final) e adicione isto ao final dele "$\times 10^n$", onde n é o número de dígitos que você passou.

  No exemplo do cubo mágico, não há nenhuma casa decimal explícito, então imagine que ele está no finalzinho do número. Você quer movê-lo até passar tudo, menos o primeiro dígito (4). Você terá que passar 19 números ao longo do caminho, por isto, a notação $4{,}3 \times 10^{19}$.

Fale a Linguagem

Você pode usar **notações científicas** para expressar números extremamente grandes ou extremamente pequenos. O resultado final de uma notação científica é um decimal vezes o número 10, que é elevado a uma potência positiva ou negativa.

- **Números Pequenos:** Mova a vírgula decimal para a esquerda até que um dígito que não seja zero apareça à esquerda da vírgula. Escreva o decimal restante (sem nenhum 0 após ele) e coloque "$\times 10^{-n}$" ao lado, onde n é, mais uma vez, o número de dígitos que você passou ao longo do caminho.

Exemplo 4: Escreva o número 0,0000000000372 em notação científica.

Solução: Por este ser um número muito pequeno, mova a vírgula para a direita, até ter exatamente um dígito que não seja zero (neste caso, o 3) à esquerda da vírgula: 3,72. Para fazer isso, a vírgula deve passar 11 dígitos (dez zeros e o 3). Então, a sua resposta final é $3{,}72 \times 10^{-11}$. O expoente é negativo porque você moveu a vírgula para a direita; ele é positivo quando se move para a esquerda.

Você Tem Problemas

Problema 4: Escreva os números em notação científica:

a. 23.451.000.000,000

b. 0.00000000125

Distribuições Covardes

Muitas vezes, ao longo deste livro, você verá um número ou uma variável multiplicada por uma quantia em parênteses, como em: $5(x + 1)$, que é lido como "5 vezes a quantia x mais um". Os parênteses são usados para indicar que o 5 é multiplicado por *toda* a quantia $x + 1$, não pelo x apenas ou só pelo 1.

De acordo com uma propriedade algébrica (que eu mantive em segredo até agora... surpresa!) chamada de *propriedade distributiva*, você pode reescrever essa expressão como $5x + 5$. Em outras palavras, você pode multiplicar 5 vezes tudo que está dentro desses parênteses.

Eu penso no x e no 1 como eu e meu irmão na época de Natal, e o 5 como um presente da minha avó. Ela sabia que se nos desse presentes diferentes, haveria briga em casa. Nós dois amaríamos nossos presentes, mas, secretamente, também desejaríamos o do outro. Para evitar isso, minha avó nos dava a mesma coisa. E é assim que a propriedade distributiva funciona – ela dá a mesma coisa (na forma de multiplicação) para todos nos parênteses, para evitar conflitos e possíveis brigas perto da árvore de natal.

Fale a Linguagem

A **propriedade distributiva** é definida matematicamente dessa forma: $a(b + c) = ab + ac$. Repare que a é multiplicado por tudo que está dentro dos parênteses (que são, então, abandonados).

Ponto Crítico

Ocasionalmente, você verá uma expressão como $2x - (3x - 5)$. Apesar de não estar escrita desta forma, isso significa o mesmo que $2x - 1(3x - 5)$; o sinal negativo na frente desses parênteses podem ser também um –1. Para simplificar essa expressão, distribua o $2x - 1(3x) - 1(-5) = 2x - 3x + 5 = -x + 5$

Exemplo 5: Aplique a propriedade distributiva: $-2x(3x^2 + 5y - 7)$.

Solução: Multiplique tudo nos parênteses por $-2x$ e adicione os resultados.

$$(-2x)(3x^2) + (-2x)(5y) + (-2x)(-7)$$

Ei... como você multiplica $-2x$ por $3x^2$? É fácil – apenas multiplique a parte dos números juntas ($-2 \cdot 3 = -6$) e a parte das variáveis juntas, usando as regras exponenciais ($x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$) para obter $-6x^3$. Faça a mesma coisa com os produtos restantes.

$$-6x^3 - 10xy + 14x$$

Repare que não há nenhum jeito simples de multiplicar o *x* e o *y* no segundo termo. Eles não são expressões exponenciais com a *mesma* base, então, você não pode adicionar as potências – só deixá-las juntos e em paz, que elas não machucarão ninguém, eu prometo.

Você Tem Problemas

Problema 5: Aplique a propriedade distributiva: $6y^3(2x - 5y^2 + 8)$

Organize suas Operações

Se eu pedisse para você resolver a expressão $4 + 5 \cdot 2$, qual resposta você me daria? A maior parte dos estudantes de álgebra responderia 18, mas, na verdade, a resposta correta é 14. Matemática não é como ler – você não realiza sempre as operações em uma expressão da esquerda para a direita. Ao invés disso, a ordem depende das operações. Por exemplo, você sempre deve fazer a multiplicação antes da adição. E então, na expressão $4 + 5 \cdot 2$, você deve multiplicar $5 \cdot 2$ para obter 10 e *então* adicionar 4, que é de onde vem a resposta correta, 14. Aqui está a ordem exata que você deve seguir ao resolver expressões:

1. **Parênteses (ou outros agrupamentos)**: Se existe mais de um agrupamento, comece com o grupo mais interno e vá trabalhando até sair deles.

2. **Expoentes**: Verifique se você pode simplificar qualquer coisa com uma potência anexada a ela.

3. **Multiplicação e Divisão**: Estas operações são feitas no mesmo passo, indo da esquerda para a direita.

4. **Adição e Subtração**: Assim como a multiplicação e a divisão, você deve adicionar e subtrair no mesmo passo, novamente indo da esquerda para a direita.

Você já deve ter ouvido falar da sigla "PEMDAS", que é usada para ajudar a lembrar da ordem das operações. Ela é formada pelas primeiras letras de cada nome das operações: **P**arênteses, **E**xpoentes, **M**ultiplicação, **D**ivisão, **A**dição e **S**ubtração. No entanto, essa sigla pode confundir alguns estudantes, pois o "**M**" antes do "**D**" sugere que a multiplicação sempre vem antes da divisão, o que não é necessariamente verdade – elas são realizadas na mesma etapa, da esquerda para a direita.

A sigla PEMDAS é bastante útil, caso se lembre dela. Mas se achá-la sem sentido, experimente esta frase: **P**aris **E**stá **M**ais **D**ourada **A**o **S**ol.

Exemplo 6: Simplifique as expressões

a. $1 + 10 \div (4 - 2)$

Solução: Primeiro vêm os parênteses, então subtraia 2 de 4.

$$1 + 10 \div 2$$

Tudo o que restou são adição e divisão, e, de acordo com a ordem das operações, a divisão vem primeiro.

$$1 + 5 = 6$$

b. $6 - [(12 + 3) \div 5 + 1]$

Solução: Há dois conjuntos de agrupamentos, então, começaremos com o mais interno, os parênteses, primeiro: $(12 + 3) = 15$.

$$6 - [15 \div 5 + 1]$$

Você ainda tem os colchetes, então, simplifique-os, garantindo que a divisão seja feita antes da adição. (A ordem das operações ainda se aplica dentro desses colchetes.)

$$6 - [3 + 1] = 6 - 4 = 2$$

c. -3^2

Solução: Deixe-me alertá-lo de que isso é uma pegadinha, porque a maioria das pessoas presume que -3^2 é o mesmo que $(-3)^2$, e não é. A expressão $(-3)^2$ é traduzida como "–3 ao quadrado" ou $(-3)(-3)$, que é igual a 9 positivo.

A outra expressão -3^2 significa "o oposto de 3 ao quadrado", porque $3^2 = 9$ e, então, $-3^2 = -9$.

Alerta do Kelley

O Exemplo 6 ensina uma lição importante. Na expressão $-a^n$, apenas a é elevado à potência n, mas em $(-a)^n$ é $-a$ que é elevado a potência n.

Você Tem Problemas

Problema 6: Simplifique a expressão $10^2 \div 5^2 \cdot 3$.

Calculando Expressões

Eu tenho usado muito a palavra "calcule" até agora, e, como você provavelmente já deduziu, é só uma palavra mais sofisticada para "me dê a resposta numérica".

Exemplo 7: Calcule a expressão $-2x^2y$ se $x = 4$ e $y = -3$.

Solução: Foram dados os valores de x e y, então, substitua as variáveis com os números correspondentes.

$$-2(4)^2(-3)$$

Agora realize as operações na ordem correta – calcule o expoente primeiro e depois multiplique da esquerda para a direita.

$$-2(16)(-3) = (-32)(-3) = 96$$

Você Tem Problemas

Problema 7: Calcule a expressão $x(y - 3)^2$ se $x = 5$ e $y = -1$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Expoentes são usados para indicar repetidas multiplicações, e há regras específicas para simplificar expressões exponenciais.
- Notação científica é uma forma curta de escrever números muito grandes ou muito pequenos.
- A propriedade distributiva permite que você multiplique algo por uma expressão inteira que está dentro de um agrupamento.
- Você deve realizar operações algébricas em uma ordem específica ao simplificar uma expressão.

Parte 2 Equações e Inequações

Retas não são novidades para você. Você já as desenhou, ficou em sua formação na escola, esqueceu-as no palco e até gostou delas em calças de veludo. No entanto, nesta parte, você as conhecerá como nunca antes. Talvez você fique desconfortável a princípio, mas, depois de um tempo, começará a trocar gentilezas e, antes que você perceba, aprenderá todo tipo de coisas interessantes que nunca descobriria se a tecnologia não tivesse prendido vocês dois em uma pequena caixa de metal aterrorizante.

Capítulo 4

Resolvendo Equações Básicas

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Calcular soluções para equações
- Utilizar regras para manipular equações
- Isolar variáveis dentro de fórmulas
- Resolver equações com valores absolutos

Se as expressões algébricas são os equivalentes lógicos de fragmentos de uma oração, então as equações são equivalentes a uma oração completa. Qual a diferença entre uma frase e uma oração completa? A presença de um verbo, e, no caso das equações, o verbo matemático será "é (igual)".

Acredite ou não, tenho a impressão que você achará equações estimulantes, especialmente comparadas aos assuntos dos primeiros capítulos. Além de eles terem sido uma revisão, tinham um grande defeito: não havia uma forma fácil de dizer se tinha acertado o problema! Claro que se pedissem para você dividir duas frações, provavelmente se lembraria de pegar um inverso e multiplicar, mas se cometesse um erro aritmético, estaria em apuros! Você pode ter a ideia certa e saber o que é para ser feito, mas, por causa de um erro bobo (como multiplicar 3

por 7 e achar 10), sua prova ficará tão marcada com tinta vermelha que parecerá que a professora derrubou ketchup nela.

Isso não acontece com equações. Ao terminar de resolver uma equação, você pode testar sua resposta e descobrir instantaneamente se está certo ou não. Se alguma coisa saiu errada, você pode voltar e consertá-la antes de a professora corrigir, deixando o ketchup quietinho na geladeira e longe da sua prova.

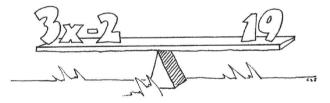
Mantendo o Equilíbrio

Se você ainda não viu uma equação básica, aqui está uma:

$$3x - 2 = 19$$

Ela se parece bastante com uma expressão, só que contém um sinal de igual. Como as expressões, equações são facilmente traduzidas em palavras. A equação acima significa "2 subtraído de 3 vezes um número é igual a 19". Sua função é descobrir exatamente que número é esse. Neste caso, $x = 7$; você provavelmente achará isso tentando números diferentes no lugar do x até algum funcionar. Porém, há formas melhores (e mais confiáveis) de resolver equações.

Figura 4.1

Porque os dois lados da equação são iguais, é como se os pesos deles se equilibrem precisamente em uma gangorra.

Fale a Linguagem

O processo de isolamento forçado de uma variável de um lado do sinal de igual (normalmente do lado esquerdo) é chamado de **solução para** esta variável.

O seu trabalho será mudar o conteúdo da gangorra de posição até que apenas o x permaneça no lado esquerdo. Este processo é chamado de *solução para x*, e ele força a resposta a aparecer, como se fosse mágica, no lado direito. Você só tem que ter cuidado para manter a gangorra equilibrada o tempo todo.

Adicionando e Subtraindo

Dê uma olhada na equação $x - 5 = 11$. Ela está basicamente perguntando "Qual número, subtraído por 5, é igual a 11?" A resposta é simples: 16. Mas deixe-me mostrar a maneira matemática oficial de chegar lá.

Lembre-se, sua meta final é deixar o x completamente sozinho no lado esquerdo da equação, o que significa que, ao fazer isso, o –5 ao lado dele desaparecerá. Bem, não irá realmente *desaparecer*, mas você pode transformá-lo em 0 adicionando o seu oposto: $-5 + 5 = 0$ (Lembra-se da propriedade inversa aditiva do Capítulo 1?). Porém, adicionando o 5 no lado esquerdo da equação, acabará com o equilíbrio da gangorra – o lado esquerdo (repentinamente mais pesado) cairá no chão, possivelmente causando uma hemorragia nasal horrível.

Para manter tudo equilibrado, você terá que adicionar o 5 nos dois lados da equação/gangorra.

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 5 & = & 11 \\ & + & 5 & & +5 \\ \hline x & + & 0 & = & 16 \\ x & & & = & 16 \end{array}$$

Agora que resta apenas o x no lado esquerdo da equação, o lado direito da equação é a resposta: 16. Para garantir que 16 é a resposta certa, volte à equação original e substitua o x por 16:

$$\begin{aligned} x - 5 &= 11 \\ 16 - 5 &= 11 \\ 11 &= 11 \end{aligned}$$

Já que a afirmação é verdadeira (11 definitivamente é igual a 11), sua resposta $x = 16$ está certa.

Como Eles Fazem Isso?

Ao substituir x por 16 para conferir sua resposta, você está aplicando a propriedade de substituição (outra propriedade para adicionar à sua lista), que permite substituir valores um pelo outro, desde que eles sejam iguais.

Você Tem Problemas

Problema 1: Ache a solução para x na equação $8 + x = 19$.

Multiplicando e Dividindo

Em seus esforços para resolver equações isolando o x, você muitas vezes terá que eliminar números *ligados* a ele, como na equação $5x = 45$. O 5 e o x não são

Fale a Linguagem

O número escrito próximo a uma variável é chamado de coeficiente. Na expressão 2x por exemplo, 2 é o coeficiente. Note que os coeficientes geralmente são escritos antes da variável:2x ao invés de x2.

grudados um ao outro ou algo do tipo – eles só estão multiplicados juntos e o 5 é chamado de ***coeficiente de x***. Então o que a equação está realmente perguntando é: "5 vezes qual número é igual a 45?"

Para responder a essa pergunta, você não pode adicionar ou subtrair o 5, como no exemplo anterior, porque nem a adição nem a subtração podem cancelar a multiplicação. Você tem duas opções ao eliminar coeficientes:

- **Coeficientes inteiros e decimais**: Se o coeficiente de x não é uma fração, divida ambos os lados da equação por esse número.
- **Coeficientes racionais**: Se x tem um coeficiente fracional $\frac{a}{b}$, multiplique ambos os lados da equação pelo seu inverso $\left(\frac{b}{a}\right)$ para achar a solução de x. Isto pode parecer familiar, pois é baseado na propriedade inversa multiplicativa, vista no Capítulo 1.

Essas duas técnicas modificam o coeficiente de x em uma fração $\frac{c}{c}$. Em outras palavras, o coeficiente de x será uma fração com o mesmo número em cima e em baixo, e qualquer fração desse tipo é igual a 1 (Qualquer número que não seja zero dividido por si mesmo é igual a 1). Logo, o lado esquerdo da equação pode ser reescrito como $1x$, que é a mesma coisa que o bom e velho x; então, seu processo de isolamento está completo.

Exemplo 1: Resolva as equações e verifique as respostas.

a. $5x = 45$

Solução: O coeficiente de x é o inteiro 5; então, divida os dois lados da equação por 5.

$$\frac{5x}{5} = \frac{45}{5}$$
$$x = 9$$

Para verificar a resposta, coloque-a no lugar de x na equação original.

$$5x = 45$$
$$5(9) = 45$$
$$45 = 45$$

b. $\frac{2}{3}y = 12$

Solução: O coeficiente de y é uma fração; então, multiplique os dois lados da equação pelo seu inverso, $\frac{3}{2}$.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}y = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{1}$$
$$\frac{6}{6}y = \frac{36}{2}$$
$$y = 18$$

Para verificar a resposta, substitua y por 18 na equação original.

$$\frac{2}{3}y = 12$$
$$\frac{2}{3}\left(\frac{18}{1}\right) = 12$$
$$\frac{36}{3} = 12$$
$$12 = 12$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Ache a solução para w na equação $-\frac{4}{5}w = 16$.

Equações em Várias Etapas

Resolver equações, na maioria das vezes, exige mais do que uma única etapa. Por exemplo, pense na equação da gangorra no início do capítulo: $3x - 2 = 19$. Não só existe um -2 no mesmo lado do sinal de igual do x como também há um 3 preso ao x, como uma meia lavada presa à uma calça. Para isolar o x (e então resolver a equação), você terá que eliminar esses dois números, usando as técnicas que discutimos até agora (mas também ajudaria jogar um pouco de amaciante na secadora para evitar a estática).

Se a solução exige mais do que uma única etapa, esta é a ordem que você deve seguir:

1. **Simplifique os lados da equação separadamente.** Cada item adicionado ou subtraído na equação é chamado de termo. Se dois termos têm exatamente a mesma porção variável, então são chamados de *termos iguais*, e você pode combiná-los como se eles fossem números.

Fale a Linguagem

Considere a expressão $3y - 7y$. Uma vez que $3y$ e $-7y$ possuem a mesma parte variável (y), eles são chamados de **termos iguais**, e você pode simplificar combinando os coeficientes enquanto deixa a variável comum em paz: $3y - 7y = -4y$. (Discutirei termos iguais com mais detalhes no Capítulo 10.)

2. **Isole a variável.** Usando a adição e a subtração, mova todos os termos que contêm a variável que você está isolando para um lado da equação (geralmente o esquerdo) e mova todo o resto para o outro lado (geralmente o direito). Você terá terminado quando tiver algo que se pareça com isso: $ax = b$ (algum número vezes a variável é igual a outro número).

3. **Elimine o coeficiente.** Se o coeficiente é diferente de 1, divida-o por ele (se for um inteiro ou um decimal) ou multiplique pelo seu inverso (se for uma fração).

Resolver equações exige prática, e levará algumas tentativas e erros antes que você fique bom nisso. Não se esqueça de conferir suas respostas!

Exemplo 2: Resolva as equações.

a. $3x - 2 = 19$

Solução: Você não pode combinar os termos do lado esquerdo da equação, porque $3x$ e -2 não possuem a mesma variável (e, portanto, não são termos iguais). Isso significa que seu primeiro objetivo é isolar o termo que contém a variável, adicionando 2 aos dois lados da equação.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2 & = & 19 \\ & + & 2 & & +2 \\ \hline 3x & + & 0 & = & 21 \end{array}$$

Divida os dois lados por 3 para eliminar o coeficiente.

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$
$$x = 7$$

b. $-14 = 2x + 4(x + 1)$

Solução: Você pode simplificar um pouco o lado direito da equação. Comece distribuindo 4 nos parênteses.

$$-14 = 2x + 4 \cdot x + 4 \cdot 1$$
$$-14 = 2x + 4x + 4$$

Combine os termos iguais $2x$ e $4x$.

$$-14 = 6x + 4$$

Neste ponto, o problema parece bastante com a equação do exemplo (a), exceto pelo termo variável aparecer no lado direito da equação. Não há problema nisso – está tudo certo. Na verdade, se você deixar o $6x$ no lado direito, será mais fácil de isolar o termo variável. Apenas subtraia 4 dos dois lados.

$$\begin{array}{rcrcr} -14 & = & 6x & + & 4 \\ -4 & & & - & 4 \\ \hline -18 & = & 6x & + & 0 \end{array}$$

Divida os dois lados por 6 para eliminar o coeficiente.

$$\frac{-18}{6} = \frac{6x}{6}$$
$$-3 = x$$

Como Eles Fazem Isso?

No Exemplo 2, letra (b), eu resolvi a equação isolando o x no lado direito, ao invés do esquerdo. Para dizer a verdade, eu prefiro o x no lado esquerdo por uma questão de gosto pessoal, apesar disso não influenciar na resposta de forma alguma.

De acordo com a *propriedade simétrica*, você pode trocar os lados de uma equação sem afetar a sua solução. Em outras palavras, eu poderia ter invertido os lados da equação em 2(b) para obter $2x + 4(x + 1) = -14$. Se você resolver essa equação, achará $x = -3$, exatamente a mesma resposta. Então, vá em frente e inverta os lados de uma equação quando quiser.

c. $-3(x + 7) = -2(x - 1) + 5$

Solução: Aplique a propriedade distributiva para simplificar os dois lados da equação.

$$-3(x) + (-3)(7) = -2(x) + (-2)(-1) + 5$$
$$-3x - 21 = -2x + 2 + 5$$

Simplifique o lado direito combinando o 2 e o 5 (que são tecnicamente termos iguais, já que eles têm a mesma parte variável – ou seja, nenhuma variável).

$$-3x - 21 = -2x + 7$$

Agora é hora de isolar o termo variável. Faça isso adicionando $2x$ em ambos os lados (para remover todos os termos x do lado direito da equação) e adicionando 21 aos dois lados também (para remover todos os termos constante do lado esquerdo da equação).

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x & - & 21 & = & -2x & + & 7 \\ +2x & + & 21 & & +2x & + & 21 \\ \hline -x & & & = & & & 28 \end{array}$$

Ponto Crítico

Como demonstrado no Exemplo 2, letra (c), uma variável negativa como $-w$ tecnicamente possui um coeficiente -1; então, você pode reescrevê-la como $-1w$ se preferir. (Isso é parecido com expoentes e potências implícitas, em que uma variável simples como w tem um coeficiente implícito de 1, então $w = 1w^1$.)

Neste ponto, você tem $-x = 28$, que significa "o oposto da resposta é igual a 28". Então, a resposta correta é $x = -28$ (já que -28 é o oposto de 28).

Veja outra forma de chegar à resposta final: reescreva a linha final da equação com um coeficiente -1 e depois a divida por este coeficiente.

$$-x = 28$$
$$\frac{-1x}{-1} = \frac{28}{-1}$$
$$x = -28$$

d. $y + 3 = \frac{1}{4}y + 5$

Solução: Nenhum lado pode ser simplificado porque nenhum dos dois possui termos iguais; então, pule para a direita para isolar os termos variáveis. Subtraia $\frac{1}{4}y$ e 3 dos dois lados da equação. Para subtrair $y - \frac{1}{4}y$, lembre-se de que y e $1y$ são a mesma coisa. Isso permite que você reescreva $y - \frac{1}{4}y$ como $1y - \frac{1}{4}y$. Subtraia os termos iguais usando um denominador comum: $\frac{4}{4}y - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}y$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} y & + & 3 & = & \frac{1}{4}y & + & 5 \\ -\frac{1}{4}y & - & 3 & & -\frac{1}{4}y & - & 3 \\ \hline \frac{3}{4}y & & & = & & & 2 \end{array}$$

O coeficiente é fracional; então, multiplique os dois lados pelo seu inverso.

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}y\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\frac{2}{1}$$
$$\frac{12}{12}y=\frac{8}{3}$$
$$y=\frac{8}{3}$$

Como 8 e 3 não possuem fatores comuns (além do 1), a fração imprópria não pode ser simplificada, então esta é a resposta final.

Você Tem Problemas

Problema 3: Ache a solução para x:

a. $3(2x - 1) = 14$

b. $2x - 7 = 4x + 13$

Equações com Valores Absolutos

Se você está tentando resolver uma equação que contém uma variável presa em barras de valor absoluto, você precisa mudar um pouco a sua técnica. Isso porque equações com valor absoluto podem ter duas respostas ao invés de apenas uma.

Veja o que fazer ao encontrar uma equação cuja variável pobre e indefesa está presa em barras de valor absoluto:

1. **Isole a expressão de valor absoluto.** Antes, você isolaria a variável. Desta vez, isole a expressão de valor absoluto inteira. Siga os mesmos passos: comece adicionando ou subtraindo as coisas do caminho e termine eliminando um coeficiente, se a expressão tiver um.

2. **Crie duas novas equações.** Essa é a parte complicada. Você terá que criar duas novas equações a partir equação de valor absoluto original. A primeira equação deve se parecer exatamente com a original, só que sem as barras. A segunda deve se parecer com a primeira, exceto que você terá o seu oposto no lado direito da equação. Isso pode parecer complicado, mas é fácil, confie em mim.

Ponto Crítico

Até simples equações de valor absoluto podem ter múltiplas soluções. Pegue a equação $|x| = 3$, por exemplo. Tanto $x = 3$ quanto $x = -3$ são respostas corretas se você conferir.

3. **Resolva as novas equações para obter sua resposta.** Ambas as soluções são sua resposta para a equação de valor absoluto original.

Para lembrar que equações de valor absoluto exigem duas partes separadas, às vezes, eu imagino que essas barras de valor absoluto são barrinhas de dinamite que explodem a equação original em duas partes. Agora que você sabe todo o processo envolvido, deixe-me mostrar como lidar com os explosivos corretamente.

Exemplo 3: Resolva a equação $4|2x-3|+1=21$

Solução: Comece subtraindo 1 dos dois lados da equação para isolar a quantidade do valor absoluto na esquerda.

$$4|2x-3|=20$$

Para completar o processo de isolamento, divida os dois lados por 4.

$$\frac{4|2x-3|}{4}=\frac{20}{4}$$
$$|2x-3|=5$$

Agora que só restam os valores absolutos no lado esquerdo, é hora de criar duas novas equações. A primeira é igual à equação acima (sem as barras): $2x - 3 = 5$. A segunda equação é quase igual, exceto que o número no lado direito será oposto: $2x - 3 = -5$. Resolva as equações separadamente.

$$\begin{aligned} 2x-3&=5 \qquad & 2x-3&=-5 \\ 2x&=8 \qquad & 2x&=-2 \\ x&=4 \qquad & x&=-1 \end{aligned}$$

A resposta é "$x = -1$ ou $x = 4$". Se você acha difícil de engolir duas respostas diferentes, veja o que acontece quando você as insere na equação original.

$$\begin{aligned} 4|2x-3|+1&=21 \qquad & 4|2x-3|+1&=21 \\ 4|2(-1)-3|+1&=21 \qquad & 4|2(4)-3|+1&=21 \\ 4|-2-3|+1&=21 \qquad & 4|8-3|+1&=21 \\ 4|-5|+1&=21 \qquad & 4|5|+1&=21 \\ 4(5)+1&=21 \qquad & 4(5)+1&=21 \\ 21&=21 \qquad & 21&=21 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Ache a solução para x na equação $|x-5|-6=4$.

Equações com Múltiplas Variáveis

Até agora, quando eu pedi para você achar a solução para uma variável, era bastante óbvio sobre qual variável eu estava falando. Por exemplo, para resolver a equação $3x + 2 = 23$, você acharia a solução para (isolar) a variável x. Por quê? Porque ela era a única variável presente! Esse x está chamando toda a atenção, como uma única menina em um colégio só de meninos.

Eu preciso adicionar uma nova habilidade em seu repertório de resolução de equações, que será extremamente importante no Capítulo 5: como achar a solução de uma variável quando existem mais de uma delas em uma equação. Não se preocupe – isso é feito basicamente da mesma maneira que você resolveu as outras equações neste capítulo. A única diferença é que, quando tiver acabado, terá variáveis nos dois lados da equação, e não apenas em um.

Exemplo 4: Ache a solução para y na equação $-2(x - 1) + 4y = 5$.

Solução: Comece simplificando o lado esquerdo da equação.

$$-2x + 2 + 4y = 5$$

Agora é hora de separar o termo variável. Já que o seu objetivo é isolar o y, elimine todos os termos que não têm y do lado esquerdo da equação. Em outras palavras, adicione $2x$ e subtraia 2 nos dois lados da equação.

$$\begin{array}{rrrrrrr} -2x & + & 2 & + & 4y & = & & & 5 \\ +2x & - & 2 & & & & +2x & - & 2 \\ \hline & & & & 4y & = & 2x & + & 3 \end{array}$$

Pode parecer estranho mover o termo $-2x$ para o lado direito da equação, mas ele tinha que ir – você está tentando achar o y, não o x. Tudo o que falta agora é eliminar o coeficiente de y; então, divida os dois lados por 4.

$$\frac{4y}{4} = \frac{2x+3}{4}$$

$$y = \frac{2x+3}{4}$$

Apesar de esta resposta estar correta, você precisa saber escrevê-la de outra forma (isso será bastante útil no Capítulo 5). Toda vez que duas ou mais coisas forem adicionadas ou subtraídas no numerador de uma fração, você poderá quebrar essa fração em frações menores. Cada termo do numerador, neste caso, $2x$ e 3, terá sua própria fração com uma cópia do denominador.

$$y = \frac{2x}{4} + \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1x}{2} + \frac{3}{4}$$

Variáveis no numerador de uma fração podem ser escritas ao lado da fração, então, mova este *x*.

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Ache a solução para *y* na equação $9x + 3y = 5$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Para resolver equações, você precisa mantê-las em equilíbrio o tempo todo – execute as operações nos dois lados da equação simultaneamente.
- Para achar a solução de uma variável ao resolver uma equação, isole a variável em um lado do sinal de igual.
- Confira suas respostas inserindo-as de volta nas equações originais.
- Para resolver equações com variáveis dentro de sinais de valores absolutos, você terá que criar duas novas equações que, provavelmente, terão respostas diferentes.

Capítulo 5

Gráficos de Equações Lineares

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Navegar o plano de coordenadas
- Traçar pontos e desenhar retas
- Identificar a inclinação de uma reta
- Traçar gráficos de valores absolutos lineares

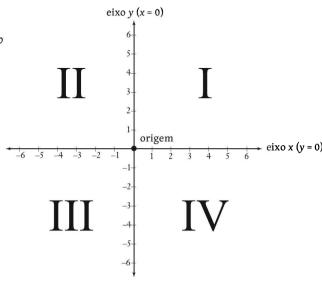
Eu sou um péssimo artista. Apesar de feliz com o meu conhecimento em matemática, daria meu braço esquerdo pela habilidade de desenhar qualquer coisa tão sem sentido como uma galinha que parecesse real (minhas débeis tentativas em desenhar uma sempre acabam se parecendo com um urso polar se equilibrando em cima de uma torradeira).

Felizmente, desenhos matemáticos são muito mais técnicos (leia-se: chatos) do que desenhos criativos, então, eu consigo lidar com eles. Neste capítulo, me concentrarei em desenhos de gráficos matemáticos – figuras de coisas como equações, e não coisas como animais árticos em eletrodomésticos. Até o final deste capítulo, você será capaz de desenhar figuras de equações lineares, cujos gráficos são formados pelas boas e velhas linhas. Nada mais fácil de desenhar do que uma linha reta, certo? (Apesar de as minhas tentativas em desenhar linhas retas acabarem parecidas com galinhas.)

Siga o Plano Cartesiano

Graças a um divertido matemático chamado René Descartes (um cara que contribuiu tanto para a matemática que eu nem irei provocá-lo por ter um nome feminino), temos uma ferramenta matemática muito útil chamada de *plano cartesiano*. É, basicamente, uma rede grande e plana usada para visualizar gráficos matemáticos. Observe a Figura 5.1 para ver um plano cartesiano.

Figura 5.1

O eixo x horizontal e o eixo y vertical se cruzam na origem e dividem o plano em quatro quadrantes (que são numerados por algarismos romanos).

Para entender o plano de cartesiano, finja que isso é um mapa de uma cidade pequena. Nessa cidade, há apenas duas estradas principais, uma com sentindo horizontal (chamada de *eixo x*) e uma vertical (chamada de *eixo y*). Essas duas estradas se cruzam uma vez, bem no meio da cidade, em um lugar chamado *origem*. Essa interseção divide a cidade em quatro *quadrantes*, que são numerados de uma maneira bastante específica. A parte nordeste da cidade é o quadrante um (I), a noroeste é o quadrante dois (II), a sudoeste é o quadrante três (III), e a sudeste é o quadrante quatro (IV).

Fale a Linguagem

O **plano cartesiano** é uma rede plana usada para visualizar gráficos matemáticos. É formada pelo **eixo x** e pelo **eixo y**, uma linha horizontal e uma vertical que se encontram em um ponto chamado **origem**. Os eixos dividem o plano em quatro **quadrantes**.

Assim como a "Rua Principal" pode ter um nome mais formal, como "Rota Estadual 4", no mundo real, os eixos *x* e *y* têm

endereços oficiais, além de seus nomes. O endereço do eixo x é a equação $y = 0$. Na verdade, toda estrada horizontal nessa cidade tem o endereço "y = *algum número*". A primeira rua horizontal acima do eixo x, por exemplo, tem a equação (endereço) $y = 1$; a rua acima tem a equação $y = 2$; e assim por diante. A primeira rua horizontal *abaixo* de eixo x tem a equação $y = -1$, a próxima $y = -2$ etc. Basicamente, todos os endereços positivos de ruas horizontais ocorrem nos quadrantes I e II, e as ruas negativas são localizadas nos quadrantes III e IV.

De forma parecida, as ruas verticais têm equações que parecem com "x = *algum número*". O eixo y tem a equação $x = 0$ e as ruas à sua direita são numeradas como $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ etc. As ruas à esquerda do eixo y têm as equações $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ etc. Então, ruas verticais positivas passam pelos quadrantes I e IV, e as ruas negativas verticais passam pelos quadrantes II e III.

Ponto Crítico

Você pode escalar cada pedaço da rede no plano cartesiano – cada linha pode representar 1, 2, 5, 10 ou qualquer número fixo de unidades. No entanto, neste livro, cada ponto geralmente representa uma distância de 1.

Porque todas essas ruas possuem esses endereços úteis, é muito fácil de indicar qualquer localização na cidade. Por exemplo, vamos dizer que eu tenha achado uma excelente padaria na interseção das ruas $x = -3$ e $y = 4$, como indicada na Figura 5.2.

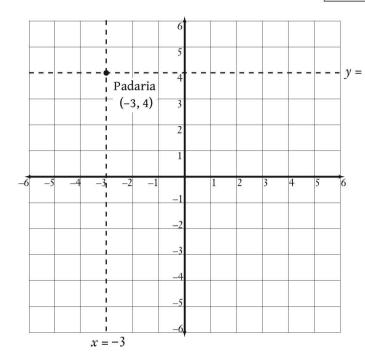



Figura 5.2

Você irá amar os pães fresquinhos nessa padaria do II quadrante.

Fale a Linguagem

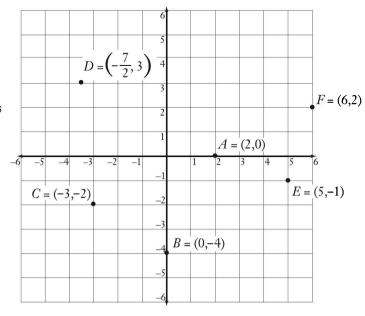
Cada ponto no plano cartesiano é descrito por um **par de coordenadas (x, y)**. A porção *x* do par é, às vezes, chamada de abscissa, e a porção *y* de ordenada. Mas essa terminologia é bastante antiga, antiquada e formal; então, você pode não escutá-las, a não ser que seu professor seja velho e antiquado.

O seu endereço oficial no plano cartesiano é (–3, 4) e está escrito na porta da padaria. Repare que, cada localização no plano cartesiano tem um endereço (x, y), chamado de *par de coordenadas*, baseado nos números de interseção da rua. Ao escrever um par de coordenadas, certifique-se de listar a rua x primeiramente, seguida pela rua y. Quando ficar bom em traçar pontos no plano cartesiano, você estará pronto para fazer coisas mais avançadas, como ligar esses pontos para formar gráficos.

Exemplo 1: Localize os pontos no plano cartesiano: $A = (2,0)$, $B = (0,-4)$, $C = (-3,-2)$, $D = \left(-\frac{7}{2}, 3\right)$, $E = (5,-1)$ e $F = (6,2)$.

Solução: Lembre-se de que cada par de coordenadas representa a interseção de uma rua vertical (o primeiro número no par) e uma rua horizontal (o segundo número no par). Por exemplo, o ponto C fica na interseção da terceira rua vertical do lado *esquerdo* da origem (porque $x = -3$ é negativo) e a segunda rua horizontal fica *abaixo* dela (porque $y = -2$ é negativo).

Figura 5.3

A solução do Exemplo 1. Linhas de grade são incluídas no plano cartesiano para que os pontos sejam identificados mais facilmente.

Os pontos A e B se localizam nos eixos x e y, porque cada um deles contém um 0 em seu par de coordenadas. O ponto mais difícil de ser traçado é o D, porque ele contém uma fração. Para facilitar as coisas para você, converta a fração imprópria $-\frac{7}{2}$ em um número misto $-3\frac{1}{2}$ (usando a técnica do Capítulo 2). Para traçar o D, conte três unidades e meia à esquerda da origem e depois três unidades acima. Todos os pontos estão traçados na Figura 5.3.

Você Tem Problemas

Problema 1: Identifique os pontos traçados no plano de coordenadas na Figura 5.4.

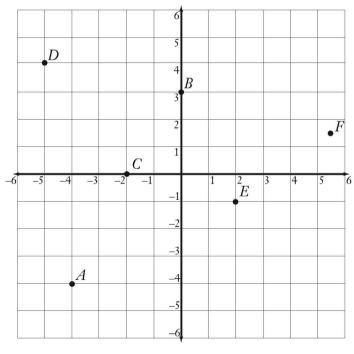



Figura 5.4

Liste as coordenadas (x, y) para cada ponto, de A até F.

Traçando Gráficos de Reta

Não que marcar pontos não seja divertido, mas se torna cansativo rapidamente. Então, vamos aumentar o desafio e desenhar algumas retas, que são apenas um pouco mais complicadas. Retas são os gráficos de *equações lineares*, que são equações que estão nesta forma: $ax + by = c$. Em outras palavras, são equações que

contêm x e y (geralmente com coeficientes incluídos) e um número sem uma variável, chamado de *constante*.

Fale a Linguagem

Uma **equação linear** se parece com $ax + by = c$, onde x e y são variáveis, a e b são seus coeficientes e c é um número com nenhuma variável (chamado de constante). Aqui estão alguns exemplos de equações lineares: $x - y = 5$, $3x - 2y = 1$, e $4y - 2 = x$ (os termos não precisam estar sempre na mesma ordem).

Como Eles Fazem Isso?

A equação $x = 7$ é linear? Sim! Apesar de uma equação linear se parecer com $ax + by = c$ e $x = 7$ não ter nenhum y, ainda assim é linear porque, tecnicamente, $b = 0$. Em outras palavras, não há porque escrever o termo y já que seu coeficiente é 0.

No Capítulo 4, você resolveu equações lineares como $2x - 1 = 15$; elas eram mais simples porque tinham apenas uma variável. É muito fácil deduzir que a solução da equação $2x - 1 = 15$ é $x = 8$, mas, quando há duas variáveis em uma equação, *uma* coisa maluca acontece. Ao invés de uma solução, você terá um número *infinito* de soluções!

Observe a equação linear $x + y = 9$, que é traduzida como "Quais números somados são iguais a 9?". Bem, há muitos pares de números x e y que podem se encaixar nessa afirmação. Se $x = 1$ e $y = 8$, você terá $1 + 8 = 9$. E se $x = 11$ e $y = -2$? Esses dois números somados também dão 9! Como será possível você resolver essa equação quando há tantas respostas?

A melhor coisa a fazer é escrever essas duas soluções como pares ordenados e traçá-los em um gráfico: (1, 8) e (11, −2).

Veja que coisa legal: o número infinito de pontos que serão a resposta, não só esses dois que eu apontei, todos eles formarão uma linha reta perfeita no plano cartesiano. Finalmente, uma terminologia matemática que faz sentido! Elas são chamadas de equações lineares porque seus gráficos são retas.

Se você já se perguntou por que teve que fazer gráficos de equações, agora já sabe! O gráfico é só uma representação visual dos pares ordenados (x, y) que, validarão a equação linear, quando transferidos para ela. Agora que você sabe o *porquê* de fazer gráficos, é hora de descobrir *como* fazê-los.

Traçando Gráficos com Tabelas

A forma mais fácil de fazer um gráfico de qualquer equação é usando uma tabela. Basicamente, você insere alguns números para x e calcula os valores y correspondentes que completam o par ordenado. Depois que fizer isso, você pode inserir os pontos no plano de cartesiano, seguro de que que eles estarão no gráfico.

Veja quais são os passos a seguir para fazer o gráfico de uma equação linear usando uma tabela:

1. **Ache a solução de y na equação.** Isso simplificará o processo. Já que eu o ensinei como fazer isso no final do último capítulo, por que não mostrar suas habilidades?

2. **Insira alguns valores para x e escreva os valores de y decorrentes.** Escreva cada par de x e y correspondente como um par coordenado (x, y).

3. **Insira os pontos no plano cartesiano e ligue-os, para formar o gráfico.** Nestes estágios iniciais do gráfico, sugiro que você use um papel quadriculado. Depois, conforme ficar mais experiente, você conseguirá traçar sem essa ajuda.

Alerta do Kelley

Quantos valores x você deve inserir? Bem, a geometria nos diz que dois pontos definem uma reta, mas se você traçar três, pode usar o terceiro para verificação. Se todos eles não estiverem na mesma linha, então, você cometeu um erro algébrico em algum lugar.

Exemplo 2: Desenhe o gráfico de $2x - y = 5$ usando uma tabela.

Solução: Ache a solução para y, subtraindo $2x$ dos dois lados da equação e depois multiplique ou divida tudo por -1, para transformar o y em positivo.

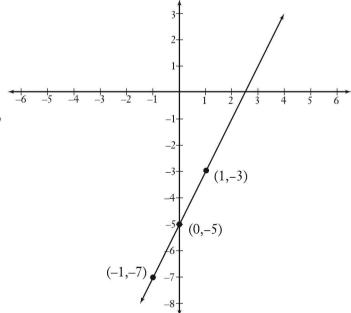
$$-y = -2x + 5$$
$$-1(-y) = -1(-2x + 5)$$
$$y = 2x - 5$$

Agora é hora de construir a tabela. A coluna da esquerda terá os valores x que você irá inserir (eu, geralmente, escolho -1, 0 e 1; já que eles são números pequenos e simples). A coluna do meio é usada para realizar os cálculos e a coluna direita é usada para escrever os pares coordenados decorrentes.

x	$y = 2x - 5$	(x, y)
-1	$y = 2(-1) - 5$ $y = -2 - 5 = -7$	$(-1, -7)$
0	$y = 2(0) - 5$ $y = -5$	$(0, -5)$
1	$y = 2(1) - 5$ $y = 2 - 5 = -3$	$(1, -3)$

Agora que você sabe que os pontos $(-1,-7)$, $(0,-5)$ e $(1,-3)$ representam a resposta, desenhe-os e ligue os pontos para obter o gráfico (ilustrado na Figura 5.5).

Figura 5.5

A reta $2x - y = 5$ se estenderá infinitamente em cada direção. Repare que os eixos x e y não aparecem no meio exato deste gráfico. Uma vez que todos os três pontos estão abaixo do eixo x, o foco do gráfico é deslocado.

Você Tem Problemas

Problema 2: Desenhe o gráfico de $-4x + y = 2$ usando uma tabela.

Gráficos com Interceptores

O ponto (ou pontos) em que um gráfico cruza os eixos x ou y é chamado de *interceptor*. Você deve ter reparado que as coordenadas sobre os eixos sempre contêm um 0. Na verdade, a coordenada no eixo x sempre terá um valor y de 0, e uma coordenada no eixo y sempre terá um valor x de 0. Isso facilita o cálculo dos interceptores. Tudo que você tem que fazer para achar um interceptor x é inserir 0 no lugar de y e, para calcular o interceptor y, inserir 0 no lugar de x. Quando você achar esses dois interceptores, trace-os e ligue os pontos para achar o gráfico da linha!

Fale a Linguagem

Um **interceptor** é um ponto no eixo x ou no eixo y que o gráfico cruza. Todo interceptor x tem a forma $(x, 0)$ e todo interceptor y tem a forma $(0, y)$.

Exemplo 3: Desenhe o gráfico de $x - y = 6$, calculando seus interceptores.

Solução: Se você inserir o 0 no lugar do x e resolver, terá o interceptor y.

$$3(0) - y = 6$$
$$-y = 6$$
$$y = -6$$

O interceptor y é (0,–6). Agora, insira o 0 no lugar de y (na equação original) e resolva, para obter o interceptor x.

$$3x - (0) = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

O interceptor x é (2,0). Trace os interceptores e ligue os pontos para obter o gráfico, como ilustrado na Figura 5.6.

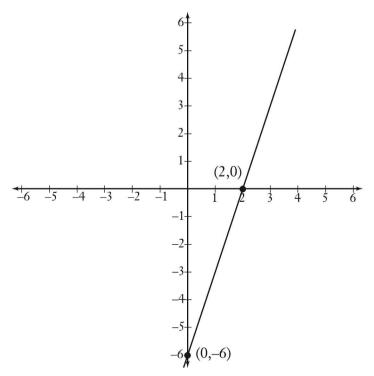



Figura 5.6

A solução do Exemplo 3, o gráfico de $3x - y = 6$*.*

Você Tem Problemas

Problema 3: Desenhe o gráfico de $4x + 2y = -84$, calculando seus interceptores.

É uma Inclinação Escorregadia

A *inclinação* de uma reta é um número que descreve o quão "inclinada" ela é. Essa reta é íngreme ou plana? Ela sobe da esquerda para a direita ou desce? Mesmo se não tiver o gráfico da equação, você pode responder todas essas perguntas sabendo apenas a inclinação da reta.

Calculando a inclinação de uma reta

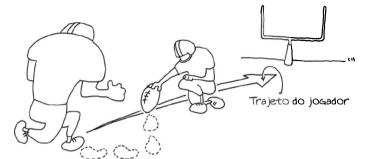
A inclinação de uma reta, além de ser extremamente útil, é notavelmente fácil de calcular. Tudo que você tem que fazer é escolher dois pontos na linha, que eu chamarei de pontos *A* e *B*, para referência. A inclinação da reta é igual a essa fração:

$$\frac{\text{número de unidades verticais entre } A \text{ e } B}{\text{número de unidades horizontais entre } A \text{ e } B}$$

Deixe-me explicar o que eu quero dizer com um exemplo da vida real: a posição de chute de um jogador de futebol americano. Sempre que um jogador entra em campo para tentar um ponto extra ou um gol, ele deve se certificar de que o caminho dele até a bola seja bastante preciso. Ele precisa correr até chutar a bola para ganhar aceleração e força (se ele simplesmente ficasse parado e balançasse as pernas, a bola não iria muito longe). Porém, se o seu trajeto de aproximação está fora de curso, a bola não irá exatamente aonde ele quer que ela vá.

Para garantir que o seu trajeto de aproximação esteja certo, a maioria dos jogadores destros faz a mesma coisa: ficam em frente à bola, dão dois passos para trás e depois mais dois passos à sua esquerda para chegar à posição inicial. Isso cria uma linha imaginária de aproximação, que passa por dois pontos: a posição da bola e sua posição inicial, como mostrado na Figura 5.7.

Figura 5.7

Para se posicionar corretamente, o jogador dá dois passos para trás da bola e depois dois passos à esquerda.

Imagine que estamos olhando o campo de cima, talvez de um avião ou de um dirigível do anunciante, e poderemos calcular facilmente a inclinação dessa linha de aproximação. O numerador da inclinação é igual ao número de passos que ele dá para frente ou para trás (para cima ou para baixo conforme olhamos o gramado); já que ele dá dois passos para trás da bola, o numerador será −2 (se ele fosse para frente, e para cima de acordo com nossa perspectiva, o número seria positivo).

O denominador da linha é igual ao número de passos que ele dá à esquerda ou à direita, em que passos à esquerda são negativos e passos à direita são positivos. Ele dá dois passos à esquerda, logo, o denominador é igual a −2. Então, a inclinação da reta é:

$$\frac{-2}{-2} = 1$$

Ponto Crítico

Você também pode calcular a inclinação da aproximação de um jogador pela distância entre o jogador e a bola, e não o contrário. Nesse caso, o numerador é 2 (dois passos para frente ou para cima) e o denominador é 2 (dois passos à direita). Isso faz com que a inclinação seja $\frac{2}{2} = 1$. De qualquer forma, você terá a mesma resposta.

Apesar de você poder calcular a inclinação de uma reta ao escolher dois de seus pontos e contar o número de passos (ou unidades) que leva para ir de um a outro, não é uma técnica muito prática, especialmente se as coordenadas dos pontos não são inteiras.

Há uma fórmula bastante útil, que você pode usar para calcular a inclinação de uma reta, ao dar as coordenadas de dois dos seus pontos – a fórmula basicamente conta as alterações horizontais e verticais para você. Funciona assim: se uma linha tem pontos (a,b) e (c, d), então, a inclinação de uma reta é igual a:

$$\frac{d-b}{c-a}$$

Alerta do Kelley

Certifique-se de que subtraiu os valores de *y* no numerador e os valores de *x* no denominador. É comum os estudantes inverterem, colocando os *x* no topo da fração por engano. E então, tenha cuidado.

Tecnicamente falando, a inclinação é definida pela alteração em *y* (a diferença dos dois valores *y*) dividida pela alteração em *x* (a diferença dos dois valores *x*).

Exemplo 4: Calcule a inclinação de um reta que passa pelos pontos (4, −1) e (−3, 9) e explique o que isso significa.

Solução: Aplique a fórmula da inclinação – subtraia os valores *y* dos pontos e divida-os pela diferença dos valores *x*.

$$\frac{9-(-1)}{-3-(4)}=\frac{9+1}{-3-4}=\frac{10}{-7}=-\frac{10}{7}$$

Lembre-se de que, se uma fração é negativa, você pode reescrevê-la colocando o sinal negativo no denominador ou no numerador, então $-\frac{10}{7}=\frac{-10}{7}=\frac{10}{-7}$.

O que essas inclinações significam? Uma inclinação de $\frac{-10}{7}$ significa que você pode ir 10 unidades pra baixo e 7 à direita de um ponto na reta, até alcançar outro ponto nesta reta, porque é exatamente isto que você faz para ir de (–3,9) até (4,–1). Por outro lado, a inclinação $\frac{10}{-7}$ garante que você pode ir 10 unidades acima e 7 à esquerda de um ponto da reta, até alcançar outro ponto, porque este é o caminho de (4,–1) até (–3,9).

Você Tem Problemas

Problema 4: Calcule a inclinação de uma reta que passa pelos pontos (4,0) e (–5,6).

Interpretando a Declividade

Você pode saber bastante sobre uma reta só de olhar a sua inclinação. Aqui estão alguns fatos sobre a fascinante relação romântica entre uma reta e sua inclinação:

- **Retas com inclinações positivas sobem.** Se a inclinação de uma reta é maior que 0, o seu gráfico será inclinado para cima, da esquerda para a direita.
- **Retas com inclinações negativas descem.** Se a sua inclinação for menor que 0, a reta será inclinada para baixo, da esquerda para a direita.
- **Retas com grandes inclinações são íngremes.** Quanto maior que 0 for o valor absoluto de uma inclinação, mais íngreme será o seu gráfico. Uma reta com inclinação 2 é significantemente mais íngreme que uma reta com inclinação 1, então, a declividade aumenta conforme esses valores da inclinação aumentam. Uma reta com uma inclinação de –5 também é bastante íngreme – só que é inclinada em uma direção diferente.
- **Retas com pequenas inclinações sobem mais lentamente.** Quanto mais próximo de 0 for o valor absoluto de uma reta, mais o seu gráfico se parecerá com uma reta horizontal.

- **Retas horizontais têm inclinações igual a 0.** Se dois pontos quaisquer em uma reta horizontal têm o mesmo valor *y*, então, quando você calcula a inclinação de uma reta que passa por estes dois pontos, o numerador será igual a 0.
- **Retas verticais têm inclinações indefinidas.** Saiba mais sobre isso no quadro abaixo.

Ponto Crítico

O que significa uma reta vertical ter sua inclinação não definida? Basicamente, a inclinação de uma reta vertical é um número ilegal. Pegue, por exemplo, a reta vertical $x = 3$. Selecione dois pontos quaisquer da linha, como (3,4) e (3,9), e insira-os na fórmula da inclinação.

$$\frac{9-4}{3-3} = \frac{5}{0}$$

Você sabia que não pode dividir por 0 na matemática?

Qualquer fração com 0 no denominador (mas não no numerador) é classificada como indefinida. É por isso que o seu livro diz que a inclinação de uma reta vertical é indefinida, ou que a linha "não tem inclinação".

Como você pode se lembrar que inclinações verticais são indefinidas mas inclinações horizontais são iguais a 0? Pense no esforço que você faz ao andar nessas retas. Quanto você teria que se esforçar para andar em uma linha horizontal? Zero.

Quanto você se esforçaria para andar em uma linha vertical? Você não pode! É impossível, porque uma linha vertical não tem inclinação. Seria como tentar andar em uma parede, e, a não ser que você tenha sido mordido por uma aranha mutante, vestir uma malha azul e vermelho e ter uma namorada que se chama Mary Jane, esta habilidade provavelmente não está no seu currículo.

Gráficos de Valores Absolutos

Uma última palavrinha sobre gráficos de equações lineares antes de eu terminar este capítulo. Você se lembra que no Capítulo 4 aprendemos que equações que contêm um *x* em valores absolutos exigem uma técnica um pouco diferente do que equações sem valores absolutos? Você precisa separar essa equação em duas partes para obter a resposta. Bem, você tem que fazer o gráfico delas de forma um pouco diferente do que o gráfico das equações lineares comuns. Enquanto o gráfico de uma equação linear normal se parece com uma reta, o gráfico de uma equação linear de valor absoluto se parece com um "V". É basicamente uma reta dobrada, uma ponta afiada (ou *vértice*), onde o gráfico muda de direção.

Observe a Figura 5.8, que contém os gráficos de $y = x - 3$ e $y = |x - 3|$. Ambos os gráficos parecem iguais à direita da reta $x = 3$. No entanto, quando x é menor que 3, o gráfico linear mergulha abaixo do eixo x (o que significa que os valores y são negativos). Reparou como o gráfico da direita faz uma curva acentuada para evitar ir abaixo do eixo x? Se $y = |x - 3|$, então y (como qualquer outro valor absoluto) não pode ser negativo; logo, o gráfico evita os valores y negativos como a praga.

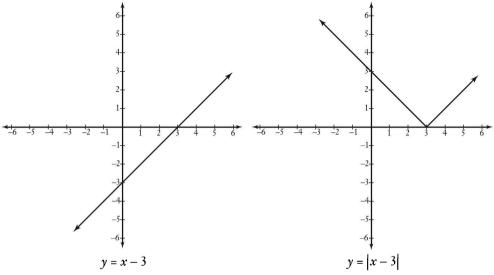



Figura 5.8

O gráfico de $y = |x - 3|$ *toma medidas drásticas para evitar valores negativos, ao contrário do gráfico de* $y = x - 3$.

A melhor maneira de desenhar um gráfico de valor absoluto linear é deduzir qual é o seu vértice, traçá-lo e, então, traçar um ponto à direita e um ponto à esquerda dele (para obter os ramos do gráfico).

Exemplo 5: Faça o gráfico da equação $y = -\frac{1}{2}|x + 4| - 3$.

Solução: Para achar o vértice do gráfico, defina o conteúdo dos valores absolutos igual a 0 e ache a solução de x.

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Agora, insira $x = -4$ de volta à equação original e ache a solução de y.

$$y = -\frac{1}{2}|(-4)+4| - 3$$
$$y = -\frac{1}{2}(0) - 3$$
$$y = -3$$

Logo, o vértice do gráfico é o ponto (–4,–3), então, trace este ponto no plano cartesiano. Agora, escolha um valor x à esquerda do vértice e um à direita (em outras palavras, escolha um x que seja menor que –4 e um que seja maior) e insira os dois na equação original. Eu escolherei $x = -6$ e $x = -2$.

$$y = -\frac{1}{2}|(-6)+4| - 3 \qquad y = -\frac{1}{2}|(-2)+4| - 3$$
$$y = -\frac{1}{2}|-2| - 3 \qquad y = -\frac{1}{2}|2| - 3$$
$$y = -\frac{1}{2}(2) - 3 \qquad y = -\frac{1}{2}(2) - 3$$
$$y = -1 - 3 \qquad y = -1 - 3$$
$$y = -4 \qquad y = -4$$

Trace os pares coordenados resultantes, (–6,–4) e (–2,–4), cada vez desenhando uma linha que começa no vértice e passa através de um dos pontos, como ilustrado na Figura 5.9.

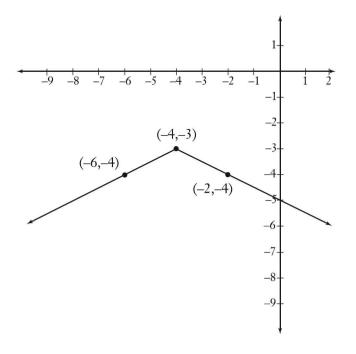



Figura 5.9

O gráfico de $y = -\frac{1}{2}|x+4| - 3$ *é a solução do Exemplo 5. Repare que esse plano de coordenadas é deslocado para destacar o quadrante III.*

ATENÇÃO

Alerta do Kelley

Se desenhar um gráfico de valores absolutos e ele for abaixo do eixo x, não significa que você o desenhou errado! Algumas equações lineares de valores absolutos ainda terão y negativos. Por exemplo, se você inserir $x = 2$ na equação $y = |x| - 5$, terá $y = -3$. Discutirei isso com mais detalhes no Capítulo 16.

Você Tem Problemas

Problema 5: Desenhe o gráfico da equação $y = |2x - 4| + 1$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- O plano cartesiano é uma rede formada pela interseção de uma linha horizontal, chamada de eixo x, e uma linha horizontal, chamada de eixo y.
- Retas verticais têm equação "$x = c$", e retas horizontais têm equação "$y = d$", onde c e d são números reais.
- Você pode fazer gráficos de equações lineares traçando pontos ou calculando seus interceptores x e y.
- A inclinação de uma reta é uma relação que descreve o quão "inclinada" ela é ao calcular as alterações verticais e horizontais entre os pontos da linha.
- A inclinação de uma reta horizontal é 0, e uma reta vertical tem a inclinação indefinida.
- O gráfico de uma equação linear de valor absoluto tem uma ponta afiada chamada de "vértice".

Capítulo 6

Cozinhando Equações Lineares

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Determinar as equações das retas
- Aplicar as fórmulas de ponto-inclinação e inclinação-interceptor
- Escrever equações lineares na forma padrão
- Explorar conexões com a geometria

Agora que você pode desenhar retas e tem alguma ideia sobre o que é uma inclinação, é hora de pegarmos pesado com equações lineares e criá-las do nada. Mesmo que você não seja bom em cozinhar ou assar, não se preocupe. As receitas de equações lineares são bastante simples, exigem pouquíssimos ingredientes e quase nunca terminam com um fogão em chamas.

Tudo o que você precisa para criar equações lineares é a sua inclinação e um dos pontos na reta. Depois que tiver essas duas informações, você estará produzindo equações em série tão rápido quanto sua avó cozinha bolos deliciosos. Ao longo do caminho, você vai até mesmo ter um melhor entendimento de equações lineares e verá como todos os pedaços se encaixam perfeitamente.

Forma Ponto-Inclinação

Se você sabe a inclinação de uma reta e um dos pontos dela, pode usar a *fórmula ponto-inclinação* para deduzir qual é a equação desta reta.

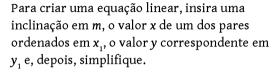
Fórmula Ponto-Inclinação: Se uma reta tem a inclinação m e passa através do ponto (x_1, y_1), então a equação da reta é:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Você está se perguntando de onde veio esse m? Por alguma razão, os matemáticos têm usado a variável m para representar inclinação por bastante tempo. Acredite ou não, ninguém realmente sabe por quê. Eu poderia tentar traçar as raízes históricas deste mistério matemático, mas não é tão interessante assim. Tudo que você precisa saber é que m é uma variável usada para representar inclinação em todas as fórmulas de equações lineares que você verá neste livro.

Para criar uma equação linear, insira uma inclinação em m, o valor x de um dos pares ordenados em x_1, o valor y correspondente em y_1 e, depois, simplifique.

Ponto Crítico

Lembre-se de que, independente de qual técnica descrita neste capítulo você usar para achar uma equação linear, você sempre precisará de duas coisas: a inclinação da reta e um ponto na reta.

Exemplo 1: Escreva a equação da reta com a inclinação –3 que passa pelo ponto (–1,5) e encontre a solução de y.

Solução: Já que a inclinação da reta é –3, defina $m = -3$ na fórmula ponto-inclinação. Você também deve substituir x_1, com o valor x conhecido (–1) e substituir y_1 com o valor y correspondente (5).

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (5) = -3(x - (-1))$$

Simplifique o lado direito da equação.

$$y - 5 = -3(x + 1)$$
$$y - 5 = -3x - 3$$

O problema pede para que você encontre o valor de y, então, isole y no lado esquerdo da equação ao adicionar 5 nos dois lados.

$$y = -3x + 2$$

Ponto Crítico

Subscritos, como o 1 pequenininho em x_1 e y_1 na fórmula ponto-inclinação, estão nela para ajudá-lo a deduzir de qual x e y estamos falando (porque a fórmula tem dois x e dois y).

Isso é tudo que há para ser feito! Há duas coisas rápidas que você pode fazer para conferir sua resposta. Primeiro, garanta que a inclinação da reta seja o seu coeficiente x (mais sobre isso na próxima seção). Depois, insira $x = -1$ e $y = 5$ na equação; isto deve produzir uma afirmação verdadeira.

$$y = -3x + 2$$
$$5 = -3(-1) + 2$$
$$5 = 3 + 2$$
$$5 = 5$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Escreva a equação da reta com inclinação 4 que passa pelo ponto (2,–7) e encontre a solução de y.

Forma Inclinação-Interceptor

Você está se perguntando por que, para achar o valor de y, teve que resolver equações lineares no Exemplo 1 e no Problema 1? Eu não estava só fazendo você domar um leão à toa (apesar de estar impressionado com sua agilidade, devo confessar); há uma boa razão para isso ser feito. Uma vez que achamos o valor de y, essa é a sua *forma inclinação-interceptor.*

Há duas grandes razões para colocar uma equação na forma inclinação-interceptor (e você provavelmente já sabe o quê elas são pelo nome): você pode identificar a *inclinação* e o *interceptor y* de uma reta (veja só) sem fazer nenhum outro esforço adicional! E mais, se você escrever equações na forma inclinação-interceptor enquanto fizer abdominais, eles podem ficar em excelente forma!

Fale a Linguagem

Quando achamos o valor de y ao resolver uma equação linear, ele está na **forma inclinação-interceptor**: $y = mx + b$. O coeficiente do termo x (m) é a inclinação da reta e o número (ou **constante**) b é o interceptor y.

Mas vamos nos focar na matemática por enquanto. Tecnicamente, a forma inclinação-interceptor de uma linha é escrita assim:

$y = mx + b$, onde m é a inclinação e b é o interceptor y

Em outras palavras, quando você achar o valor de y ao resolver a equação linear, o coeficiente de x é a inclinação da reta e o número com nenhuma variável (chamado de *constante*) marca o ponto no eixo y $(0,b)$ em que a linha passa.

Exemplo 2: Identifique a inclinação e as coordenadas de um interceptor y na equação linear $x - 4y = 12$.

Solução: Tudo que você tem que fazer para transformar uma equação na forma ponto-interceptor é achar o valor de *y*. Para isolar o *y*, subtraia *x* dos dois lados da equação e depois divida tudo pelo seu coeficiente –4.

$$-4y = -x + 12$$

$$y = \frac{1}{4}x - 3$$

O coeficiente do termo *x* é $\frac{1}{4}$; então, a inclinação da reta é $\frac{1}{4}$. Sendo constante –3, então, o gráfico da reta passará pelo eixo dos *y* no ponto (0,–3). (Não se esqueça de que a coordenada *x* de um ponto no eixo *y* é sempre 0).

Você Tem Problemas

Problema 2: Identifique a inclinação e as coordenadas do interceptor *y* na equação linear $3x + 2y = 4$.

Gráficos com a Forma Inclinação-Interceptor

O Capítulo 5 já demonstrou algumas maneiras de fazermos gráficos de equações lineares, mas pensei em jogar mais um método na mistura. Eu sei que você não precisa de centenas de formas diferentes de fazer gráficos de retas, assim como não precisa de cem maneiras diferentes de amarrar os seus sapatos. Mas, já que desenhar gráficos usando a forma inclinação-interceptor de uma reta é minha técnica preferida, quero dividi-la com você. Será um momento de aproximação entre nós. Além do mais, não tem nada mais chato do que traçar ponto atrás de ponto para formar um gráfico. Essa maneira será um pouco diferente, e o ajudará a entender como a inclinação funciona, caso você esteja meio confuso com isso.

Veja como desenhar um gráfico de uma reta usando a forma inclinação-interceptor:

1. **Ache a solução de *y* ao resolver a equação.** A equação precisa estar na forma inclinação-interceptor.
2. **Determine a inclinação e o interceptor *y* da reta.** Lembre-se de que isso é tão fácil quanto olhar os números no lado direito da equação inclinação-interceptor.
3. **Se a inclinação é negativa, posicione o sinal negativo no numerador ou no denominador.** Você pode colocar o sinal negativo em qualquer um dos dois lugares (mas não nos dois ao mesmo tempo), não importa qual.
4. **Trace o interceptor *y* do gráfico.** Lembre-se de que o interceptor *y* tem coordenadas (0,*b*); trace esse ponto.

5. **Começando no interceptor *y*, use a inclinação para contar os passos para outro ponto no gráfico.** Números positivos no numerador significam para cima e números negativos no numerador significam para baixo; positivos no denominador significam direita e negativos no denominador significam esquerda. Por exemplo, uma inclinação de $\frac{-2}{3}$ significa contar 2 unidades para baixo e 3 unidades à direita do interceptor y para chegar até o outro ponto no gráfico.

6. **Ligue os dois pontos.** Apenas ligue os pontos para finalizar o gráfico. Lembre-se de que ele se estende infinitamente nas duas direções.

Como Eles Fazem Isso?

Você está se perguntando de onde vem a inclinação-interceptor e como nós podemos ter tanta certeza de que o coeficiente *x* é a inclinação e *b* é o interceptor *y*?

Vamos dizer que há uma reta com a inclinação *m* e o interceptor *y* (0,*b*) (as variáveis familiares da forma inclinação-interceptor). Use a fórmula ponto-inclinação para tirar a equação dessa reta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y - b = mx$$

Encontre a solução de *y* e você acabará com a forma inclinação-interceptor de uma reta.

$$y = mx + b$$

Nasce uma estrela!

Exemplo 3: Trace o gráfico da equação $5x + 3y = 12$, usando a forma inclinação-interceptor.

Solução: Comece resolvendo a equação para achar o valor de *y*.

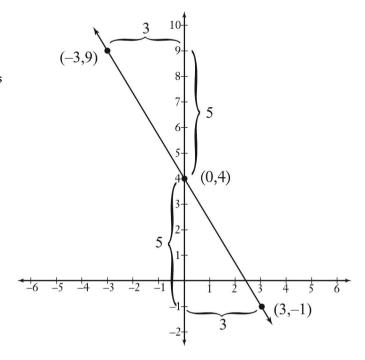
$$3y = -5x + 12$$
$$y = -\frac{5}{3}x + 4$$

O interceptor *y* da reta é (0,4) e sua inclinação deve ser reescrita com o sinal negativo no numerador ou no denominador: $\frac{-5}{3}$ ou $\frac{5}{-3}$.

Trace o interceptor *y* e conte o seu caminho até o próximo ponto, baseado na inclinação que você encontrou. Você deve contar cinco unidades para baixo e três unidades à direita $\left(\frac{-5}{3}\right)$ ou contar cinco unidades para cima e três unidades à esquerda $\left(\frac{5}{-3}\right)$. De qualquer forma, quando liga os pontos, você acabará com a mesma reta, ilustrada na Figura 6.1.

Eu gosto desse método de desenhar gráficos de retas porque parece que você está lendo um mapa do tesouro: comece na palmeira grande e em seguida, dê cinco passos ao sul e três passos para leste até chegar ao Baú do Tesouro (que, por sinal, é um ótimo nome para um jogo de *video game*).

Figura 6.1

Você pode ir 5 passos acima e 3 passos à esquerda do interceptor y (0,4) ou 5 passos abaixo e 3 passos à direita do interceptor y até alcançar outro ponto na reta.

Você Tem Problemas
Problema 3: Trace o gráfico da equação $-2x - y = 1$, usando a forma inclinação-interceptor.

Forma Padrão de uma Reta

Desde que mantenha uma equação equilibrada, você pode fazer qualquer coisa em seus dois lados para alterar a maneira que eles se parecem. Por exemplo, dê uma olhada nessas duas equações lineares:

$$3x - 2y = 4 \qquad 1 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}x$$

Em poucos passos, você pode pegar essa equação feia da direita, cheia de frações, e transformá-la em uma equação muito mais bonita (e confiável) como a da esquerda. Comece multiplicando os dois lados da equação por 4

$$\frac{4}{1}\left(1+\frac{1}{2}y\right)=\frac{4}{1}\left(\frac{3}{4}x\right)$$
$$4+\frac{4}{2}y=\frac{12}{4}x$$
$$4+2y=3x$$

Como Eles Fazem Isso?

Coeficientes fracionários geralmente são escritos assim: $\frac{1}{3}y$. No entanto, escrever $\frac{1}{3}y$ como $\frac{y}{3}$ é igualmente correto. Por quê? Tecnicamente, você pode dar à variável um denominador 1 e multiplicar as frações: $\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{1} = \frac{y}{3}$.

Agora, inverta os lados da equação, o que é aceitável, de acordo com a propriedade simétrica.

$$3x = 4 + 2y$$

Subtraia $2y$ de ambos os lados e a transformação está completa.

$$3x - 2y = 4$$

Esta fração não é muito mais bonita que $1+\frac{1}{2}y=\frac{3}{4}x$? A maioria dos professores de matemática também acha. Na verdade, eles gostam tanto dela assim que geralmente exigem que você escreva suas respostas nesse formato mais controlado e com menos frações.

Essa versão mais bonita da equação é chamada de *forma padrão*, e tem as seguintes propriedades:

- A equação se parece com $ax + by = c$; em outras palavras, os termos x e y estão no lado esquerdo da equação e a constante no lado direito.
- Todos os números (a, b e c) são inteiros.
- O coeficiente a do termo x, é positivo.

Por que se dar ao trabalho de colocar equações na forma padrão? Para ser honesto, eu não sei por que professores se preocupam tanto com isso. Eu prefiro a forma

Fale a Linguagem

Uma equação na **forma padrão** se parece com $ax + by = c$, onde b e c são inteiros e a é um inteiro positivo.

Ponto Crítico

Se uma equação linear está na forma padrão $ax + by = c$, você pode usar o atalho $m = -\frac{a}{b}$ para calcular a inclinação. Por exemplo, a inclinação de $5x - 8y = -2$ é $m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-8} = \frac{5}{8}$.

inclinação-interceptor porque os valores *m* e *b* realmente representam algo, enquanto os coeficientes da forma padrão não são tão úteis assim.

Alguns dizem que a forma padrão é importante porque toda equação linear pode ser colocada na forma padrão, o que não é verdade na forma inclinação-interceptor (em uma reta vertical, como $x = 2$, não podemos achar o valor de y, e se não há nenhum y na equação, isso significa que a forma inclinação-interceptor não é uma opção). Talvez isso seja verdade, mas eu acho que a forma padrão é preferida porque as pessoas odeiam frações – até mesmo a sua professora de álgebra, apesar de que ela nunca admitirá isso.

Exemplo 4: Coloque a equação linear $-\frac{2}{3} - 4x = \frac{5}{9}y$ na forma padrão.

Solução: A primeira coisa que temos que fazer é nos livrar de todas essas frações horríveis. Dê uma olhada no denominador na equação (3 e 9) e calcule o menor denominador comum (caso você tenha esquecido como fazer isso, revisa o processo no Capítulo 2 – tem algo a ver com um número chamado Grandão).

Neste caso, o menor denominador comum é 9, então, multiplique os dois lados da equação por 9 escrito como uma fração $\left(\frac{9}{1}\right)$.

$$\frac{9}{1}\left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{1}x\right) = \frac{9}{1}\left(\frac{5}{9}y\right)$$
$$-\frac{18}{3} - \frac{36}{1}x = \frac{45}{9}y$$
$$-6 - 36x = 5y$$

Alerta do Kelley

Apenas o termo *x* tem que ser positivo na forma padrão (termo *y* e a constante não precisam sê-lo). Como você pode ver no Exemplo 4, mudar o sinal do termo *x* (quando necessário) resultará em um ou mais termos se tornando negativos, e está tudo bem com isso.

Mova o $5y$ para o lado esquerdo da equação ao subtraí-lo nos dois lados. Também, adicione 6 a ambos os lados. Assim, a constante acabará no lado direito da equação.

$$-36x - 5y = 6$$

O termo x tem que ser positivo para a equação estar na forma padrão, mas agora ele não está. Sem problemas – apenas multiplique os dois lados da equação por −1.

$$36x + 5y = -6$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Coloque a equação linear $\frac{5}{4}y = \frac{7}{3} + \frac{1}{6}x$ na forma padrão.

Equações Lineares Travessas

O que fazer quando você está tentando descobrir a equação de uma reta mas a inclinação não está ajudando? Você ainda usará a fórmula ponto-inclinação para escrever a equação – você só terá que, primeiro, calcular a inclinação. Basicamente, você será confrontado com dois tipos de tarefas de equações lineares travessas:

- Encontrar a equação da reta dado dois pontos nessa reta
- Criar uma reta paralela ou perpendicular a uma segunda reta

Você precisará usar duas abordagens diferentes para calcular a inclinação nesses dois tipos diferentes de problemas.

Como ir do Ponto A ao Ponto B

Um tipo de problema algébrico clássico pede para você escrever a equação da reta que passa por dois pontos. Para resolver esse tipo de problema, precisa da fórmula de inclinação do Capítulo 5, que afirma que uma reta que passa entre os pontos (a,b) e (c,d) tem a seguinte inclinação:

$$m = \frac{d-b}{c-a}$$

Agora é hora de colocarmos essa fórmula em uso. Você não apenas achará a inclinação da reta que passa entre dois pontos, mas, também, a equação dessa reta.

Exemplo 5: Escreva a equação da reta que passa entre os pontos (–4,7) e (2,–1) na forma padrão.

Solução: Para criar uma equação linear, você precisa da inclinação da linha e de um ponto na linha. Este problema dará *dois* pontos na linha, mas nenhuma inclinação; então, você precisa usar a fórmula da inclinação.

$$m = \frac{-1-(7)}{2-(-4)}$$

$$m = \frac{-8}{6}$$

$$m = -\frac{4}{3}$$

Agora que já tem a inclinação, escolha um dos pontos dados e aplique a fórmula ponto-inclinação. Veja como será o processo de substituição, caso você escolha o ponto (2,–1):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - (2))$$
$$y + 1 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

Para escrever a reta em forma padrão, você precisará eliminar todas essas frações. E então, multiplique tudo por 3.

$$3(y+1) = \frac{3}{1}\left(-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}\right)$$
$$3y + 3 = -\frac{12}{3}x + \frac{24}{3}$$
$$3y + 3 = -4x + 8$$

Mova as variáveis para o lado esquerdo da equação e as constantes para o direito.

$$4x + 3y = 5$$

Ponto Crítico

Depois de descobrir a inclinação no Exemplo 5, não importa qual ponto você insira na forma ponto-inclinação – ambos darão a você a mesma resposta final. Veja como ficaria se tivesse escolhido o ponto (–4,7) ao invés de (2,–1):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (7) = -\frac{4}{3}(x - (-4))$$
$$y - 7 = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$
$$3(y - 7) = 3\left(-\frac{4}{3}x - \frac{16}{3}\right)$$
$$3y - 21 = -4x - 16$$
$$4x + 3y = 5$$

Você pode conferir a sua resposta ao inserir os dois pontos originais na equação. Se eles resultarem em afirmações verdadeiras, você fez tudo certo.

Insira (–4,7)	Insira (2,–1)
$4(-4)+3(7)=5$	$4(2)+3(-1)=5$
$-16+21=5$	$8-3=5$
$5=5$	$5=5$

Você Tem Problemas

Problema 5: Escreva a equação da reta que passa pelos pontos (–3,5) e (–8,0) na forma padrão.

Retas Paralelas e Perpendiculares

Você pode, ainda, não saber muito sobre geometria – e está tudo bem. No entanto, talvez peçam a você para construir equações de retas paralelas e perpendiculares. E então, aqui está uma rápida explicação destes conceitos:

- *Retas Paralelas* nunca se cruzam. Como os trilhos de um trem, elas seguem lado a lado, mas nunca se tocam. Isso porque retas paralelas têm a mesma inclinação, o que faz elas se manterem na mesma distância exata uma da outra, sempre.
- *Retas Perpendiculares* se cruzam em ângulo reto, ou em ângulos de 90 graus. Você provavelmente sabe o que são ângulos retos, mas, caso não saiba, imagine um quadrado ou retângulo – os seus lados se encontram em ângulos de 90 graus. Retas perpendiculares têm inclinações que são inversamente opostas.

Fale a Linguagem

Retas Paralelas não se cruzam porque elas têm a mesma inclinação. **Retas Perpendiculares** se encontram em ângulos de 90 graus, graças às inclinações, que são inversamente opostas. Em outras palavras, se as retas *l* e *n* são perpendiculares e a inclinação da reta *l* é $\frac{a}{b}$, então, a inclinação da linha *n* deve ser $-\frac{b}{a}$.

A figura 6.2 contém um conjunto de retas paralelas e perpendiculares e indica a inclinação de cada retas.

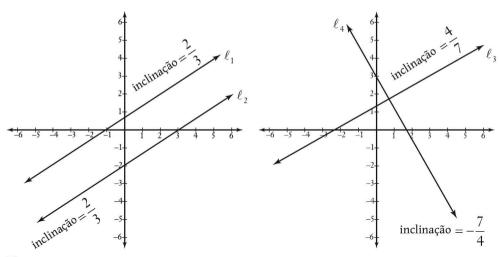



Figura 6.2

As retas paralelas l_1 e l_2 têm a mesma inclinação, enquanto as inclinações das retas perpendiculares l_3 e l_4 são inversamente opostas.

Exemplo 6: Escreva a equação da linha *k* na forma inclinação-interceptor, sendo que ela passa pelo ponto (2,–3) e é perpendicular à reta $x - 5y = 7$.

Solução: Se *k* é perpendicular à linha $x - 5y = 7$, suas inclinações são inversamente opostas. Coloque $x - 5y = 7$ na forma inclinação-interceptor para descobrir sua inclinação. Em outras palavras, ache a solução de *y*:

$$-5y = -x + 7$$
$$y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$$

Essa reta tem a inclinação $\frac{1}{5}$. Porém, a inclinação da reta k é seu inverso oposto: $-\frac{5}{1} = -5$. (Apenas vire a fração de cabeça para baixo e multiplique-a por –1).

Agora que você tem a inclinação de *k* e um dos seus pontos (o problema diz que (2,–3) é um ponto na reta *k*), aplique a fórmula ponto-inclinação.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-3) = -5(x - (2))$$
$$y + 3 = -5x + 10$$

O problema pede a resposta na forma inclinação-interceptor, então, ache o valor de y.

$$y = -5x + 7$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Escreva a equação da reta k na forma padrão, sendo que k passa pelos pontos $(-6,1)$ e é paralela à reta $-2x + 6y = 7$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- A fórmula ponto-inclinação afirma que uma reta com inclinação m passando pelo ponto (x_1,y_1) tem a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- Para colocar uma equação na forma inclinação-interceptor, ache a solução de y:$y = mx + b$. A inclinação da reta é m, e b é o interceptor y.
- Retas paralelas têm inclinações iguais e retas perpendiculares têm inclinações que são inversamente opostas.

Capítulo 7

Inequações Lineares

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Diferenças entre equações e inequações
- Solucionar e desenhar inequações básicas
- Interpretar inequações compostas
- Soluções gráficas de inequações lineares

Quando Thomas Jefferson escreveu que "todos os homens foram criados iguais", na Declaração de Independência Americana, ele provavelmente falou isto no sentido filosófico e político. Isso quer dizer que todas as pessoas devem ter os mesmos direitos e as mesmas responsabilidades como cidadãos dos Estados Unidos. Falando de maneira prática, é difícil concordar que todos os homens (e todas as mulheres) *realmente* são criados iguais. Se isso fosse verdade, não faria muita diferença se o técnico do Flamengo decidisse me colocar como atacante durante a final do Campeonato Brasileiro.

Se todos os homens fossem criados iguais, eu teria um talento atlético imensurável e um chute potente que resultaria no gol da vitória, para o louvor e a glória de milhares de torcedores, que cantariam o meu nome e comprariam a camisa com o meu número estampado. Na vida real, se eu jogasse uma partida, nós dois sabemos

o que aconteceria; eu seria derrubado por qualquer jogador por menor que ele fosse e, instantaneamente, todos os ossos do meu corpo se quebrariam, destruindo qualquer chance de eu ter uma camisa com meu número e meu nome nela (infelizmente, talvez eu tivesse que usar uma camisa feita inteiramente de gesso, apesar de o efeito ser menos engraçado na vida real, garanto).

Ponto Crítico

Aqui está uma maneira de lembrar qual sinal de inequação é qual: o símbolo "menor que" aponta para a esquerda. Apenas lembre-se que "menos vai para a esquerda".

De qualquer forma, pessoas são raramente criadas exatamente iguais e, da mesma forma, afirmações matemáticas também são diferentes. Neste capítulo, falarei sobre *inequações*, que parecem um pouco com equações, mas seus lados não são iguais. Resolver inequações até se parece um pouco com resolver equações, a única *grande* diferença que você encontrará serão os gráficos de inequações, que são diferentes dos de equações.

Equações versus Inequações

Se os dois lados de uma inequação não são iguais, tem que haver uma razão para isso acontecer. A explicação óbvia é que um lado deve ser maior que o outro. Saber qual lado é maior é muito importante. E então, você usará um dos quatro sinais de inequações (no lugar do sinal de igual) para identificar o lado maior e indicar se há ou não uma possibilidade remota de os dois lados serem iguais:

Alerta do Kelley

Quando lidamos com números negativos, quanto mais negativo um número for, menor ele é (o que parece contraditório). Logo, $-17 < -9$ porque ambos os números são negativos e 17 é maior que 9. Pela mesma razão, você pode escrever $-9 > -17$.

- $<$: Este símbolo significa "menor que". Use-o para indicar que a quantidade no lado esquerdo tem um valor menor que a quantidade no lado direito. Por exemplo, a afirmação $-2 < 7$ literalmente significa "menos dois é menor que sete".
- $>$: Se você inverter o sinal de menor para o outro lado, terá o símbolo de "maior que", que significa exatamente o oposto do sinal $<$. Então, você pode escrever $100 > 57$, porque 100 é maior que 57.
- $\leq$: Este símbolo significa "menor que ou igual a"; basicamente, significa o mesmo que o sinal $<$, porém, também permite que os dois lados tenham o mesmo valor. Em outras palavras, a afirmação $6 \leq 10$ é verdadeira (porque 6 é menor que 10), mas $7 \leq 7$ também é (porque 7 é igual a ele mesmo).

- $\geq$: O símbolo "maior que ou igual a" é parecido com o sinal "menor que ou igual a", porque ele também permite a possibilidade de igualdade. Logo, a afirmação $8 \geq -1$ e $-15 \geq -15$ são ambas verdadeiras.

Ponto Crítico

Há um quinto símbolo de inequação, $\neq$, que significa "diferente de". Você pode usá-lo para afirmar que $10 \neq 4$ (10 é diferente de 4), o que é verdade, mas não muito útil. Seria melhor dizer que $10 > 4$ (10 é maior que 4), porque explica o porquê de 10 e 4 serem diferentes.

Exemplo 1: As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas?

a. $-7 > -1$

Solução: Falsa, −7 é mais negativo e, portanto, menor que −1.

b. $1 \geq 1$

Solução: Verdadeira, 1 é maior que *ou* igual a 1 (apenas uma dessas duas condições pode ser verdadeira por vez e, apesar de 1 não ser maior que ele mesmo, ele é igual a si mesmo).

Você Tem Problemas

Problema 1: As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas?

a. $-3 < -3$

b. $5 \leq 11$

Resolvendo Inequações Básicas

A maioria das inequações que você verá em álgebra terá variáveis. Apesar de uma afirmação como $1 < 7$ ser fácil o suficiente para ser correta, não é intelectualmente estimulante ou interessante o suficiente. Ao invés disso, terá que resolver inequações como $-5x + 3 > -32$. Basicamente, o seu trabalho será descobrir os valores de x para fazer essa afirmação ser verdadeira. É quase o mesmo objetivo que você tinha ao resolver equações, só que no mundo das inequações há muitas soluções, não apenas uma.

As mudanças de humor da inequação

Para resolver uma inequação que contém apenas uma variável, siga os mesmos passos que você usou ao resolver equações. Em outras palavras, simplifique os dois lados da inequação, isole a variável e, por fim, elimine o coeficiente da variável.

No entanto, há uma grande diferença entre equações e inequações: ao resolver uma inequação, se multiplicar ou dividir os dois lados por um número negativo, deve inverter o sinal de inequação.

Ponto Crítico

Quando você resolve equações, realiza as mesmas operações nos dois lados do sinal de igual. Siga os mesmos passos com as inequações, realizando as operações nos dois lados do sinal de inequação.

O que eu quero dizer com "inverter" o sinal de inequação? Mude os sinais de "menor que" para "maior que", e vice-versa (sinais de "menor que ou igual a" viram "maior que ou igual a", e vice-versa). Eu chamo isso de a mudança de humor dos sinais da inequação. Lembre-se de que isso só acontece quando você multiplica ou divide por um número negativo – o que só ocorre quando você está tentando eliminar o coeficiente. Então, verifique se o coeficiente é negativo quando você estiver eliminando-o, e inverta o sinal de inequação quando necessário.

Exemplo 2: Resolva a inequação $-5x + 3 > -32$.

Solução: Os dois lados da inequação já estão simplificados (nenhum lado tem termos iguais); então, isole a variável ao subtrair 3 nos dois lados do sinal de "maior que". O sinal de inequação não mudará, porque você não está *multiplicando* ou *dividindo* por um número negativo.

$$-5x > -35$$

Hora de eliminar o coeficiente – divida ambos os lados por –5. Não se esqueça de inverter o sinal de inequação, porque está dividindo por um número negativo.

$$\frac{-5x}{-5} < \frac{-35}{-5}$$
$$x < 7$$

Qualquer número menor que 7, quando inserido no lugar de x, transforma essa afirmação de inequação verdadeira. Você obviamente não pode conferir todos eles para garantir que sua resposta esteja certa (você passaria o resto da sua vida fazendo isso), mas não custa nada conferir uma resposta, só para garantir que está entendendo. Veja como pode conferir se $x = 6$, que deve estar correto, já que é menor que 7:

$$\begin{aligned} -5x+3 &> -32 \\ -5(6)+3 &> -32 \\ -30+3 &> -32 \\ -27 &> -32 \end{aligned}$$

Porque −32 é mais negativo que −27, −32 < −27, e $x = 6$ é uma solução válida para a inequação.

Você Tem Problemas

Problema 2: Resolva a inequação $2(w - 6) \leq 18$.

Desenhando Soluções

No Capítulo 5, quando discutíamos sobre equações lineares, eu expliquei por que era importante desenhar gráficos. Quando equações lineares têm duas variáveis, geralmente x e y, há um número infinito de pares ordenados que fazem a equação ser verdadeira. Porque não é fácil escrever uma lista infinita de soluções, é útil representá-las com um gráfico.

Agora, você sabe que inequações básicas também têm um número infinito de soluções; então, desenhar os gráficos o ajudará a visualizar essas equações também. Porém, inequações básicas (como essas das seções anteriores) são diferentes das equações lineares, porque têm apenas uma variável. Logo, você não precisa de um plano de coordenadas para desenhar um gráfico de inequações básicas; tudo o que você precisa é uma *reta numerada,* ilustrada na Figura 7.1. Essencialmente, a reta numerada é o eixo x do plano cartesiano; como não há uma segunda variável, você não precisa de um segundo eixo no gráfico.

Alerta do Kelley

Cerifique-se de manter o x no lado esquerdo da inequação quando resolvê-la. Se acabar com $13 < x$ como uma solução, pode inverter os lados, mas, ao fazer isto, você também deve inverter o sinal de inequação, assim: $x > 13$. Caso contrário, a seta no seu gráfico acabará apontando à direção errada.

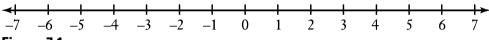



Figura 7.1

A reta numerada é usada para gráficos de inequações com apenas uma variável.

Como desenhar o gráfico da solução de uma inequação básica:

1. **Resolva a inequação.** Antes que você possa desenhar o gráfico de uma inequação, precisa saber a sua solução.

Ponto Crítico

Um ponto sólido no gráfico da reta numerada indica que um determinado número deve ser incluído como uma solução possível, enquanto um ponto aberto indica que o valor não pode ser a solução. Por exemplo, o gráfico de $x > 7$ contém um ponto aberto em 7, porque ele não é uma resposta válida (7 não é maior que ele mesmo).

2. **Desenhe uma reta numerada.** A reta numerada não precisa ser sempre centrada em 0. Às vezes é mais útil centrar a reta numerada no valor que você achou na solução, ou perto dele.

3. **Pontilhe a zona quente.** Ao resolver a inequação, você obterá algo parecido com: $x \leq a$ ou $x > a$, onde a é um número real. Se o símbolo da inequação permite a possibilidade de igualdade ($\leq$ ou $\geq$), desenhe um ponto sólido em a. Se, por outro lado, o símbolo for $<$ ou $>$, desenhe um "ponto aberto" ou um círculo no valor a.

4. **Não é falta de educação apontar.** Desenhe uma seta escura, começando no ponto, que aponte na direção do símbolo de inequação. Se a sua solução final tiver um dos sinais de menor que ($<$ ou $\leq$), desenhe uma seta para e esquerda. Se a solução tiver um sinal de maior que ($>$ ou $\geq$), a seta (como o símbolo) deve apontar à direita.

Exemplo 3: Desenhe a solução para $3(1 - 2x) < -5x + 6$.

Solução: Primeiro você precisa resolver a inequação em x. Você quer isolar o x no lado esquerdo da inequação, então, depois que você distribuir o 3, adicione $5x$ e subtraia 3 de ambos os lados.

$$\begin{array}{rcr} 3 - 6x & < & -5x + 6 \\ \underline{-3 + 5x} & & \underline{+5x - 3} \\ -x & < & 3 \end{array}$$

Multiplique (ou divida) os dois lados por -1 para eliminar o sinal negativo da frente do x, e não se esqueça de inverter o sinal de inequação.

$$x > -3$$

Para desenhar a solução, faça um ponto aberto (porque o símbolo de inequação não contém "ou igual a") em -3 e faça uma seta escura a partir desse ponto que se estenda à direita (porque o sinal de inequação, como uma seta, aponta para a direita), como ilustrado na Figura 7.2.

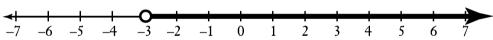



Figura 7.2

Gráfico da inequação $x > -3$.

O gráfico deixa claro que cada número real à direita de –3 (mas não o incluindo) na reta numerada, fará a inequação $x > -3$ e, portanto, a inequação original $3(1 - 2x) < -5x + 6$ verdadeiras.

Você Tem Problemas

Problema 3: Desenhe a solução para $1 - x \geq 2x - 5$.

Inequações Compostas

Você pode definir uma série de valores (como $x > 2$ e também $x \leq 9$) usando uma *única* afirmação de inequação, chamada de *inequação composta* $2 < x \leq 9$. Essa afirmação é lida como "2 é menor que *x*, que é menor ou igual a 9". Em outras palavras, *x* tem um valor entre 2 e 9 – pode até ser igual a 9, mas não pode ser igual a 2.

Fale a Linguagem

Uma **inequação composta** é uma afirmação única usada para representar duas inequações de uma só vez, como $a < x < b$. Ela descreve uma série (ou intervalo) de números que são maiores que *a* e menores que *b*. Se esses números estão incluídos ou não nesse intervalo, é decidido pelo sinal de inequação. Se o símbolo for ≤, então o número está incluso; se for <, então ele não está.

Dê uma olhada na Figura 7.3, que contém as partes de uma inequação composta. Repare que você sempre deve escrever o limite inferior à esquerda e o limite superior à direita. Além disso, você sempre deve usar os símbolos < ou ≤, ou a afirmação pode não fazer sentido.

$$\text{limite inferior} \leq \text{variável} < \text{limite superior}$$

Figura 7.3

Os símbolos de inequação podem ser <, ≤ ou qualquer combinação dos dois.

Resolvendo Inequações Compostas

Uma inequação composta tem três peças, ao contrário da habitual equação de dois lados ou da inequação simples. Para resolver uma inequação composta, o seu

objetivo será isolar a variável no meio. Faça isso ao adicionar, subtrair, multiplicar e dividir as mesmas coisas em *todas as três partes* da inequação ao mesmo tempo.

Alerta do Kelley

Se você dividir todas as três partes de uma inequação composta por um número negativo, inverta os dois sinais de inequação para obter $b > x > a$, onde b é o limite superior e a é o limite inferior. Eu prefiro $a > x > b$ que significa a mesma coisa mas tem o limite inferior no lado esquerdo.

Exemplo 4: Resolva a inequação $-4 \leq 3x + 2 < 20$.

Solução: Você quer isolar x onde $3x + 2$ estão atualmente; então, comece subtraindo 2 de todas as três partes da inequação.

$$-6 \leq 3x < 18$$

Para eliminar o coeficiente de x, divida *tudo* por 3.

$$-2 \leq x < 6$$

Então, qualquer número entre –2 e 6 (incluindo 2, mas excluindo 6) poderá ser a solução para esta inequação composta.

Você Tem Problemas

Problema 4: Resolva a inequação $-1 < 2x + 5 < 13$.

Gráficos de Inequações Compostas

Para desenhar o gráfico de uma inequação composta, use pontos para marcar seus limites em uma reta numérica. Assim como nos gráficos de inequações básicas, os pontos das inequações compostas correspondem ao tipo de símbolo de inequação: sinais de ≤ e ≥ devem ser marcados com um ponto sólido, e sinais < e > devem ser marcados com um ponto aberto. Uma afirmação de inequação composta tem dois símbolos de inequação e dois pontos na reta, então, use o símbolo mais próximo a cada limite para decidir qual tipo de ponto você irá desenhar.

Depois que você tiver marcado os limites, desenhe uma linha escura, conectando-os. Essa linha escura indica que todos os números entre os limites são soluções para a inequação.

Exemplo 5: Desenhe a inequação composta $-14 < x \leq -6$.

Solução: Como –14 (o limite inferior dessa inequação) tem um símbolo < próximo a ele, desenhe um ponto aberto em –14 na reta numerada. O limite superior, por outro lado, tem um símbolo ≤ próximo a si; então, marque –6 com um ponto sólido. Finalmente, ligue os dois pontos com uma linha escura, como ilustrado na Figura 7.4.

Você Tem Problemas
Problema 5: Desenhe a inequação composta $-2 \le x < 5$.

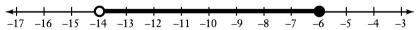



Figura 7.4

Gráfico de $-14 < x \le -6$. Repare que essa linha numérica não é centrada em 0. Todos os pontos-chave no gráfico são negativos; logo, o foco está nos números negativos.

Inequações com Valores Absolutos

O que acontece com valores absolutos? Quando você está se acostumando a fazer algo de uma maneira, vêm essas barrinhas que exigem que as coisas sejam feitas do jeito delas. Elas são como aqueles namorados ou namoradas exigentes que não se contentavam em deixar você viver a sua vida como você sempre fez. Não, de repente era "Por que não podemos comer em algum lugar legal para variar?" e "Existe alguma lei contra você escovar os seus dentes mais de uma vez ao mês?". Esses ajustes não são difíceis de serem feitos, mas é complicado mudar as coisas quando você cai numa rotina.

No Capítulo 5, você dividiu equações com valores absolutos em duas equações distintas, e sem valor absoluto para poder chegar a uma solução. Similarmente, você tem que quebrar inequações com valores absolutos em duas inequações distintas e sem valor absoluto para chegar a uma solução. Entretanto, só para complicar um pouco mais as coisas (como se isto fosse possível), a técnica que você usa para inequações com sinais de "menor que" não é a mesma que você usa quando tem os sinais de "maior que".

Inequações Envolvendo "Menor Que"

Se pedirem para você resolver um problema de inequação que contém valores absolutos, e o símbolo de inequação é $<$ ou $\le$, estes são os passos que você deve seguir para chegar a uma solução:

1. **Isole a expressão de valor absoluto no lado esquerdo da inequação.** Quando você fizer isso, o problema deverá se parecer com isto: $|x + a| < b$, onde a e b são números reais. (Se a é negativo, o problema se parecerá com $|x - a| < b$.)

2. **Crie uma inequação composta.** Reescreva a afirmação $|x + a| < b$ como $-b < x + a < b$. Em outras palavras, retire os símbolos de valor absoluto, coloque um símbolo de inequação correspondente à esquerda da afirmação e, depois, escreva o oposto da constante no lado esquerdo disso.

3. **Resolva a inequação composta.** Use os procedimentos da seção anterior para resolver e/ou desenhar a inequação composta.

Exemplo 6: Resolva a inequação $|2x-1|+3 \leq 6$ e desenhe a solução.

Solução: Subtraia 3 dos dois lados da inequação e isole a expressão de valor absoluto.

$$|2x-1| \leq 3$$

Exclua as barras de valores absolutos e escreva o oposto de 3 no lado esquerdo da expressão. Entre o –3 recém-adicionado e a expressão sem barras, coloque um sinal de ≤ para combinar com o que já está lá.

$$-3 \leq 2x-1 \leq 3$$

Resolva a inequação composta ao adicionar 1 às três expressões e, depois, divida tudo por 2.

$$-2 \leq 2x \leq 4$$
$$-1 \leq x \leq 2$$

Desenhe a solução, posicionando pontos sólidos em –1 e 2 e ligando-os, como ilustrado na Figura 7.5.

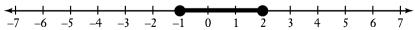



Figura 7.5

O gráfico de $|2x-1|+3 \leq 6$ *corresponde ao gráfico da inequação composta* $-1 \leq x \leq 2$.

Se o problema tivesse o sinal < ao invés de ≤, você o teria resolvido da mesma maneira. O gráfico também seria bastante parecido, exceto os pontos, que seriam abertos, ao invés de fechados.

Você Tem Problemas

Problema 6: Resolva a inequação $4|x-5| < 8$ e desenhe a solução.

Inequações envolvendo "Maior Que"

Inequações com valores absolutos que contêm os símbolos > ou ≥ são resolvidas de forma parecida às suas irmãs – as inequações com "menor que". Da mesma forma, começamos isolando os valores absolutos e, depois, reescrevemos as inequações sem as barras de valor absoluto. No entanto, desta vez, você não acabará com uma inequação composta.

Reescreva a afirmação como duas inequações separadas, uma que se pareça com a original (mas não tenha barras de valor absoluto) e a outra com o sinal de inequação invertido e o oposto da constante. Isso significa que $|x+a|>b$ se transforma nestas duas expressões:

$$x+a>b \qquad \text{ou} \qquad x+a<-b$$

Repare na palavra "ou" entre as expressões. Isso não significa que você tem que escrever uma ou outra (ambas precisam estar na solução); significa que pode inserir um *x* nas duas expressões e já funcionaria para apenas *uma delas*. Portanto, esse valor *x* é uma solução à inequação original.

Exemplo 7: Resolva a inequação $|2x+5|-4>-1$ e desenhe a solução.

Solução: Comece isolando a expressão de valor absoluto ao adicionar 4 nos dois lados da inequação.

$$|2x+5|>3$$

É hora de aplicar aquelas duas afirmações de inequações. Crie a primeira simplesmente ao remover as barras: $2x + 5 > 3$. A segunda exige que você inverta o sinal de inequação e pegue o oposto da constante para acabar com $2x + 5 > -3$. (É uma boa escrever a palavra "ou" entre as afirmações.)

$$2x+5>3 \qquad \text{ou} \qquad 2x+5<-3$$

Resolva as inequações separadamente.

$$\begin{aligned} 2x &> -2 \qquad \text{ou} \qquad 2x<-8 \\ x &> -1 \qquad \text{ou} \qquad x<-4 \end{aligned}$$

Esse monstro estranho de duas cabeças é a resposta. Ela diz que qualquer número maior que −1 ou menor que −4 poderá ser a resposta para a inequação original. Porque a solução consiste em duas afirmações, o gráfico da solução consistir-se-á em seus dois gráficos. Desenhe as duas inequações na mesma linha numérica, como ilustrado na Figura 7.6.

Figura 7.6

Crie o gráfico da solução de $|2x+5|-4>-1$ *ao desenhar* $x > -1$ *e* $x > -4$ *na mesma linha numérica.*

Você Tem Problemas

Problema 7: Resolva a inequação $|x-4| \geq 2$ e desenhe a solução.

Gráficos de Inequações Lineares

Não seria legal se subitamente descobrisse uma habilidade que não sabia que tinha? E se um belo dia, enquanto está correndo, descobrisse que ao virar a sua perna direita só um pouquinho você poderia, de repente, falar alemão fluentemente? (Isso se não soubesse falar alemão antes disso, obviamente.) Isso seria uma coisa realmente para ser contada, talvez até em alemão. Bem, você descobrirá que (com apenas uma leve torção da sua perna direita) sabe desenhar inequações lineares.

Ponto Crítico

Equações e inequações que contêm uma variável são desenhadas em uma reta numerada. Equações e inequações com duas variáveis são desenhadas em um plano cartesiano.

A grande diferença entre as inequações básicas e as inequações lineares é que inequações básicas têm uma variável, enquanto as lineares têm duas, geralmente x e y. A coisa útil em gráficos de inequações lineares é que eles são baseados nos gráficos de equações lineares, que já vimos no Capítulo 5. No entanto, gráficos de inequações têm algumas características que gráficos lineares não têm:

- **O gráfico nem sempre é uma reta sólida.** Se o símbolo de inequação na afirmativa é < ou >, então a reta no gráfico de inequação será pontilhada, ao invés de sólida, para indicar que os pontos ao longo da reta não são soluções à inequação. Porém, se o símbolo de inequação for ≤ ou ≥, a reta será sólida.
- **A solução é uma região inteira do gráfico, e não só uma reta.** As retas (sólida ou pontilhada) separam o plano cartesiano em duas regiões, como uma cerca dividiria uma propriedade. Todos os pontos em um lado da reta fazem a inequação ser verdadeira, enquanto todos os outros pontos do outro lado não fazem o mesmo. Você identifica a região de soluções ao sombreá-la levemente no seu gráfico.

Para desenhar uma inequação linear, trate-a como uma reta regular e a desenhe (certifique-se se a reta deve ser sólida ou pontilhada, baseada no símbolo de inequação). Depois, escolha uma coordenada (chamada de *ponto teste*) do plano cartesiano e a insira na inequação original. Se a inequação for verdadeira, então todos os outros pontos na mesma região do gráfico também serão; então, sombreie esta região. Se o ponto teste não funcionar, então a região do outro lado da reta é a solução.

Ponto Crítico

A linha pontilhada em uma desigualdade linear são duas dimensionais equivalentes ao círculo aberto em uma desigualdade básica. As duas significam "não inclua este valor(ou par de coordenadas) como uma solução possível

Exemplo 8: Desenhe o gráfico da inequação $2x - 3y < 12$.

Solução: Por um momento, pense que o símbolo de inequação é um sinal de igual, e desenhe a equação linear resultante. A maneira mais fácil de desenhar uma reta é calculando seus interceptores (veja o Exemplo 3 no Capítulo 5, para entender). A inequação não indica "ou igual a", então, faça a linha pontilhada, conforme ilustração na Figura 7.7.

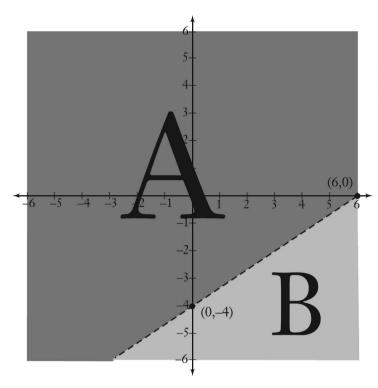



Figura 7.7

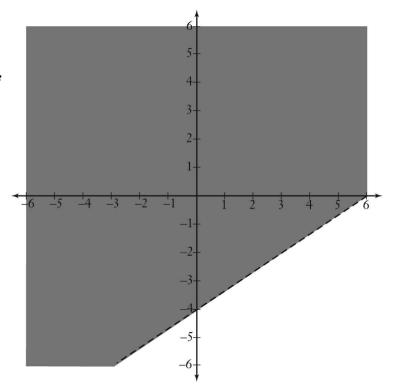
Este não é o gráfico final, mas repare como a reta divide o plano de coordenadas em duas regiões, identificadas como A e B.

Escolha um ponto teste de uma dessas duas regiões. A origem (0,0), geralmente, é a melhor escolha (a não ser que a reta passe por ela). Isso porque, o que pode ser mais fácil que inserir 0 em x e y? Em qualquer ponto que você escolher, insira a sua coordenada x em x na inequação e sua coordenada y em y. Veja como funciona para a origem:

$$2(0)-3(0)<12$$
$$0<12$$

Porque essa afirmação é verdadeira (0 é, de fato, menor que 12), a origem é uma solução da inequação e, assim, todos os outros pontos nessa região do plano também o são (região A na Figura 7.7). Sombreie a região da solução para completar o gráfico da inequação, como ilustrado na Figura 7.8.

Figura 7.8

O gráfico de $2x - 3y < 12$ *em todo o seu esplendor. Parece sombrio para mim.*

Você Tem Problemas

Problema 8: Desenhe a inequação $y \geq -2x + 3$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Se multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo, você deve inverter o sinal de inequação.
- É importante indicar (através de pontos abertos ou linhas pontilhadas) pontos e linhas que não estão incluídos em um gráfico por causa dos símbolos de inequação < e >.
- Inequações compostas expressam duas inequações em uma afirmação.
- Para resolver inequações com valores absolutos, você deve reescrevê-las como um par de inequações básicas (ou uma única inequação composta) desprovidas de valores absolutos.
- Gráficos de inequações lineares contêm regiões de solução sombreadas.

Parte 3 Sistemas de Equações e Álgebra Matricial

Você está prestes a resolver várias equações, não uma de cada vez, mas simultaneamente! (Esqueça, matemático! Isso parece trabalho de um *matemágico*!) Nesta parte, você usará vários métodos diferentes para resolver grupos de equações, incluindo uma incursão na terra da matriz. (Infelizmente, isso não é tão legal quanto parece.)

Capítulo 8

Sistemas de Equações e Inequações Lineares

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Definir sistemas de equações
- Resolver sistemas usando diferentes técnicas
- Classificar sistemas com soluções infinitas ou sem solução
- Traçar gráficos das soluções de sistemas de inequações

Você está se perguntando o que poderia ser mais divertido do que uma equação linear? (Eu sei que você não está realmente se perguntando isso, mas vamos fingir que sim.) Bem, claro que a resposta seria duas equações lineares ao mesmo tempo (chamamos isto de *sistema de equações*). Dá para acreditar? Duas equações pelo preço de uma, tudo por sete vezes sem juros de R$19,95 – e mais, você ainda levará uma engenhoca que permite que faça a sua própria carne seca em casa!

Fale a Linguagem

Um **sistema de equações** é uma coleção de duas ou mais equações. Elas são geralmente escritas com uma chave à esquerda, que indica que todas elas pertencem ao mesmo sistema.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 1 = 4 \end{cases}$$

Seu trabalho será me dizer qual par de coordenadas (ou pares) fará as *duas* equações verdadeiras. Há três formas básicas de resolver sistemas de equações: gráficos, substituição e eliminação. Enquanto você as explora neste capítulo, tente descobrir com qual você se sente mais confortável. Entretanto, lembre-se de que alguns sistemas são mais fáceis de serem resolvidos ao usar uma técnica à outra. Então, certifique-se de que você domina e sabe usar todas.

Resolvendo um Sistema com Gráficos

O gráfico de uma reta é uma representação visual de todas as soluções da sua equação linear. Se você desenha os gráficos de duas retas em um único plano cartesiano, qualquer ponto em que esses gráficos se cruzam representa uma solução que as equações lineares têm em comum. Duas retas geralmente se cruzam em um único ponto; então, a maioria dos sistemas de equações lineares tem uma única solução.

Em outras palavras, para resolver um sistema de equações, tudo que você precisa fazer é desenhar as retas e descobrir onde elas se tocam. A parte difícil, porém, é fazer esses gráficos de forma precisa. Sua resposta depende muito da precisão com que você desenha os gráficos. Portanto, deve usar papel quadriculado e uma régua para garantir que suas medidas e retas estejam perfeitas.

Ponto Crítico

Duas retas geralmente se cruzam em um ponto, mas, às vezes, não é exatamente isto que acontece. E se duas retas são paralelas (ou seja, nunca se encontram) ou duas retas se sobrepõem completamente (e se cruzam em todos os pontos dos seus gráficos)? Você não terá nenhuma solução, ou, então, mais soluções do que possa contar. Explicarei como lidar com isso mais tarde neste capítulo.

Exemplo 1: Resolva o sistema de equações através de um gráfico.

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ -2x - y = -6 \end{cases}$$

Solução: Calcule os interceptores x e y das retas e use estes pontos para criar seus gráficos (veja o Exemplo 3 no Capítulo 5 para mais informações). A equação $x - 2y = 8$ tem os interceptores (8,0) e (0,–4); a equação $-2x - y = -6$ tem os interceptores (3,0) e (0,6). Como você pode observar na Figura 8.1, os gráficos se sobrepõem no ponto (4,–2).

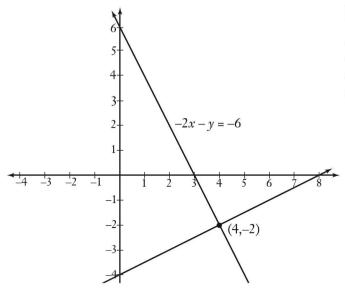



Figura 8.1

A solução do sistema de equações é o ponto (4,–2), onde os gráficos das equações se cruzam.

Na verdade, seria mais exato dizer que os gráficos na Figura 8.1 *parecem* que se sobrepõem em (4,−2); afinal de contas, você terá que desenhar seus gráficos manualmente, então, eles não serão tão precisos quanto os meus, desenhados por computador. Para garantir que a solução do sistema realmente seja (4,−2), substitua $x = 4$ e $y = -2$ nas duas equações do sistema. Se você obter afirmações verdadeiras depois que simplificar as equações, você pode estar certo de que (4,−2) não apenas *parece* o ponto de interseção dessas retas – ele realmente *é* o ponto de interseção.

Ponto Crítico

Escreva a solução do sistema no Exemplo 1 como um ponto, (4,−2), ou como um conjunto de coordenadas *x* e *y*: $x = 4$ e $y = 2$.

$$\begin{array}{rr} x-2y=8 & -2x-y=-6 \\ 4-2(-2)=8 & -2(4)-(-2)=-6 \\ 4+4=8 & -8+2=-6 \\ 8=8 & -6=-6 \end{array}$$

Felizmente, as coordenadas da solução são inteiros, que são fáceis de serem localizados no plano cartesiano. Porém, se a solução fosse algo muito mais feio, como $\left(4\frac{1}{19},-2\frac{3}{8}\right)$, não teria como achar essa resposta apenas olhando o ponto de interseção em um gráfico desenhado à mão. Portanto, esse método de resolver sistemas de equações não é usado frequentemente. Métodos mais sofisticados (e menos subjetivos), sobre os quais você aprenderá nas próximas seções, são

necessários. Além disso, quem quer ficar carregando papel quadriculado o tempo todo?

Você Tem Problemas

Problema 1: Resolva o sistema através de seu gráfico.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$$

O Método da Substituição

Se for fácil isolar uma variável em uma das equações de um sistema, então esse sistema é um forte candidato ao método da substituição. A parte boa, nessa alternativa ao método de gráficos, é que você não precisa de nenhuma habilidade nova – você só precisa saber como resolver uma equação para uma variável, conforme vimos no Capítulo 4.

Por sinal, o método da substituição pode ser usado para resolver *qualquer* sistema de equações, e se a solução é um único ponto (o que geralmente acontece), essa técnica *sempre* obterá a resposta certa. Porém, quanto mais complicadas as equações no sistema, mais aritmética será usada e, logo, mais fácil será de ocorrer algum erro.

O melhor momento para usar o método de substituição é quando uma das variáveis no sistema tem um coeficiente 1 ou –1 (em outras palavras, não há nenhum coeficiente numérico escrito junto à variável). Esse coeficiente "ausente" torna a resolução da variável correspondente mais fácil do que cair das escadas (o que eu sei porque é uma coisa muito fácil de ser feita, considerando a quantidade incrível de vezes que eu consegui isso).

Alerta do Kelley

Depois que você resolver uma das equações em um sistema para uma variável, certifique-se de inserir o resultado na outra equação. Se inserir o resultado de volta na forma original da equação que você resolveu, todos os termos se cancelarão, e você obterá 0 = 0 (uma afirmação verdadeira, mas desinteressante).

Exemplo 2: Use o método da substituição para resolver o sistema.

$$\begin{cases} 7x + 4y = 6 \\ 2x - y = -9 \end{cases}$$

Solução: O coeficiente de y na segunda equação é –1, o que torna a solução de y bastante simples. Subtraia $2x$ dos dois lados da equação e multiplique tudo por –1.

$$-y = -2x - 9$$
$$-1(-y) = -1(-2x - 9)$$
$$y = 2x + 9$$

Como Eles Fazem Isso?

O método da substituição elimina uma das variáveis em uma equação. Ao resolver a segunda equação para *y* no Exemplo 2, você está de fato reescrevendo *y* como uma afirmação que contém *x*. Então quando substitui *y* por *x* na outra equação, você terá uma equação com todos os *x* nela, que terá apenas uma resposta. Isso é bem melhor do que a equação linear original $2x - y = -9$, que (como todas as equações lineares) tem um número infinito de par de coordenadas como solução.

Agora que você sabe que $y = 2x + 9$, substitua *y* na outra equação com $2x + 9$.

$$7x + 4y = 6$$
$$7x + 4(2x + 9) = 6$$

Distribua 4 e ache o valor de *x*.

$$7x + 8x + 36 = 6$$
$$15x + 36 = 6$$
$$15x = -30$$
$$x = -2$$

Você tem metade da resposta correta – tudo o que precisa é o valor *y* para completar o par de coordenadas. Insira $x = -2$ na equação que você resolveu para achar o valor de *y*.

$$y = 2x + 9$$
$$y = 2(-2) + 9$$
$$y = -4 + 9$$
$$y = 5$$

A solução do sistema é (–2, 5), que você também pode escrever como $x = -2$, $y = 5$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Use o método da substituição para resolver o sistema.

$$\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 3x + 7y = -5 \end{cases}$$

O Método da Eliminação

Como o quadro "Como Eles Fazem Isso?" na última seção sugere, o método da substituição é basicamente uma forma sorrateira de eliminar uma variável. É o equivalente a um soco surpresa no boxe. Antes que o sistema saiba o que o

acertou, bam! Acabou! Uma das variáveis está estirada inconsciente no ringue, e você pode lidar com a variável que sobrou sem problemas. (Afinal, dois contra um não é justo, certo?)

Se o método da substituição é um soco surpresa, então, resolver sistemas de equações com o *método da eliminação* é o equivalente metafórico a uma luta completa. Não há nenhuma sutileza e nenhum plano tático desonesto aqui – você simplesmente entra, manipula as equações com força bruta e mostra a elas que você está no comando. Como no método da substituição, a eliminação funcionará para qualquer sistema que tem uma solução válida. Ela até mesmo lança alguma luz sobre a situação em que não há uma resposta, o que será discutido na próxima seção.

Como o nome sugere, todo o propósito do método da eliminação é eliminar uma variável, e fará isso ao multiplicar uma ou as duas equações no sistema por um número real. Multiplicar por um número real, desde que faça isto em ambos os lados da equação, não mudará a solução da equação; então, deve estar se perguntando como isso ajudará. Bem, você não multiplica por números que tirou do nada – há um truque nisso. Você multiplica de forma que, ao alinhar os termos iguais nas duas equações e adicionar as equações, uma das variáveis desaparecerá.

Depois que essa variável sumir, a luta basicamente acabou. Tudo o que resta, antes que você possa nocautear o seu adversário, é resolver a equação e avaliar a variável faltante.

Ponto Crítico

Se você está tendo problemas em descobrir o que deve ser multiplicado a cada equação para eliminar uma variável, use esse pequeno truque. Primeiro, escreva as equações na forma padrão (se elas ainda não estão assim). Você acabará com algo parecido com isso:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

(Claro que *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* serão números reais). Para eliminar *x*, multiplique a equação de cima por *d* e a equação de baixo por $-a$.

Por exemplo, no Exemplo 3, você poderia ter multiplicado a equação de cima por 6 e a equação de baixo por –2, e você obteria a mesma resposta final.

Exemplo 3: Resolva o sistema usando o método da eliminação.

$$\begin{cases} 2x - y = 13 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases}$$

Solução: Se você multiplicar a equação de cima por –3, terá $-6x + 3y = -39$. Por que faria isso? Bem, você acabaria com um coeficiente *x* de –6, que é o oposto do coeficiente *x* na outra equação. Se você adicionar a nova versão da equação de cima à equação de baixo, os termos *x* desaparecerão.

$$\begin{array}{rcrcr} -6x & + & 3y & = & -39 \\ +6x & + & 4y & = & 4 \\ \hline & & 7y & = & -35 \end{array}$$

A equação resultante é bem simples de ser resolvida – divida os dois lados por 7 e você obterá $y = -5$. Agora é a vez de descobrir qual valor *x* completa o par de coordenadas. Insira $y = -5$ em *qualquer* uma das equações lineares do sistema; você terá a resposta correta, independentemente de qual você escolher.

$$\begin{aligned} 6x+4y&=4 \\ 6x+4(-5)&=4 \\ 6x-20&=4 \\ 6x&=24 \\ x&=4 \end{aligned}$$

A solução desse sistema é o par de coordenadas (4,–5).

Alerta do Kelley

Ao multiplicar uma equação por um número, não se esqueça da constante. Em outras palavras, multiplicando a equação $2x - y = 13$ por –3, você terá $-6x + 3y = -39$, e não $-6x + 3y = 13$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Resolva o sistema usando o método da eliminação.

$$\begin{cases} 2x - y = -11 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

Sistemas Fora de Sintonia

Ocasionalmente, enquanto tenta resolver um sistema de equações, uma coisa muito bizarra irá acontecer – quando abrir o seu livro de álgebra, ele sugará e transportará você para o mundo mágico de Nárnia. Bem, isso não é verdade. O acontecimento estranho é esse: todas as variáveis desaparecerão!

Quando todas as variáveis somem, significa que uma dessas duas coisas aconteceu:

- **O sistema não tem solução.** Se você terminou com uma afirmação falsa, como 0 = 7, então, as equações lineares no sistema não têm solução comum, e o sistema é descrito como *inconsistente*. Isso acontece quando os gráficos das retas são paralelos – não há ponto de solução porque não há nenhum ponto de interseção.

- **O sistema tem infinitamente muitas soluções.** Se você terminou com uma afirmação verdadeira, como 5 = 5, então, as equações lineares no sistema têm gráficos que se sobrepõem, cruzando-se em todos os pontos de seus gráficos. Tais sistemas são chamados de dependentes.

Fale a Linguagem

Um sistema de equações lineares que não possui solução é **inconsistente**, enquanto um sistema que tem infinitamente muitas soluções é **dependente**.

Exemplo 4: Classifique o sistema de equações.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Solução: Para resolver esse sistema através do método da eliminação, multiplique a primeira equação por 3 e o adicione à segunda equação.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 6y & = & 3 \\ -3x & + & 6y & = & 3 \\ \hline 0 & + & 0 & = & 6 \end{array}$$

Ei, espere um minuto! Os termos x e y também desapareceram! Todas as variáveis sumiram e a afirmação 0 = 6 é falsa. Isso significa que o sistema é inconsistente e que não há soluções para ele.

Você obterá o mesmo resultado com o método da substituição. Resolva a primeira equação para x: $x = 2y + 1$. Substitua isso na segunda equação, e você acabará com uma afirmação sem variável (mas ainda falsa).

$$\begin{aligned} -3(2y+1) + 6y &= 3 \\ -6y - 3 + 6y &= 3 \\ -3 &= 3 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Classifique o sistema de equações.

$$\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ -8x - 6y = 4 \end{cases}$$

Sistemas de Inequações

De acordo com o Capítulo 7, o gráfico de uma inequação linear é uma região sombreada do plano cartesiano delimitada por uma reta sólida ou pontilhada, dependendo do sinal de inequação envolvido. Com isso em mente, aqui está como desenhar a solução de um sistema de inequações:

1. **Desenhe cada inequação do sistema no mesmo plano cartesiano.** Cerifique-se de sombrear claramente, pois, quando há várias inequações, o gráfico fica bagunçado rapidamente.

2. **A solução é a área de sobreposição sombreada.** A região do gráfico que contém sombreamento *de todas as inequações do sistema* representa a solução.

A região sombreada comum é a solução do sistema porque contém as coordenadas que fazem *todas* as inequações do sistema serem verdadeiras.

Exemplo 5: Desenhe a solução do sistema de inequações.

$$\begin{cases} x > -3 \\ x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

Solução: Desenhe as duas inequações no mesmo plano de coordenadas. (Se você está pensando em como desenhar $x > -3$ porque tem apenas uma variável, trate-o como a equação $x = -3$, a linha vertical três unidades à esquerda do eixo y.) Você deverá acabar com o gráfico da Figura 8.2.

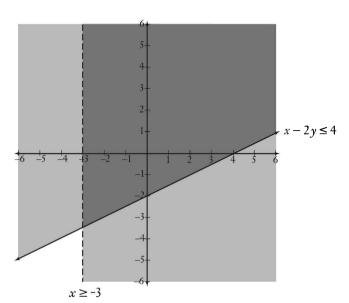
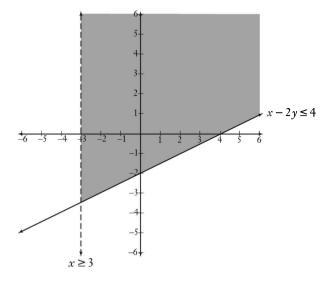



Figura 8.2

Use pontos testes para determinar o que você deve sombrear à direita da linha vertical $x > -3$ *e acima da linha* $x - 2y \leq 4$.

A região com sombreamento mais escuro na Figura 8.2 representa a solução do sistema de inequações. Alguns professores permitirão que você deixe o gráfico como está, aceitando a região mais escura como resposta final, enquanto outros preferirão que você desenhe apenas a solução, como ilustrada na Figura 8.3.

Figura 8.3

É mais fácil identificar a solução do sistema de inequações neste gráfico, comparado ao gráfico da Figura 8.2.

Você Tem Problemas

Problema 5: Desenhe a solução do sistema de inequações.

$$\begin{cases} y \leq -\dfrac{2}{3}x + 1 \\ y > 4x - 5 \end{cases}$$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- A solução de um sistema de equações faz todas as equações no sistema verdadeiras.
- Um sistema de equações lineares terá uma solução (um par de coordenadas), nenhuma solução (sistemas inconsistentes) ou infinitas soluções (sistemas dependentes).
- Os métodos de eliminação e de substituição permitem que você resolva sistemas de equações ao reescrevê-los em termos de uma variável.
- As soluções dos sistemas de inequações lineares são desenhadas como regiões sombreadas no plano de coordenadas.

Capítulo 9

O Básico da Matriz

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Definir uma matriz e suas partes componentes
- Adicionar, subtrair e multiplicar matrizes
- Calcular determinantes de matrizes
- Resolver sistemas de equações usando determinantes

Atualmente, quando a maioria das pessoas escuta a palavra "matriz", elas pensam em pessoas de ternos escuros que podem pular de prédio em prédio enquanto se desviam de balas em câmera lenta, ao se contorcerem em ângulos impossíveis. Infelizmente para todos nós, há algumas diferenças entre uma matriz matemática e uma matriz descrita em um filme de ficção científica.

Por um lado, a matriz matemática contém quase nada de violência (nenhuma, na verdade, a não ser que você lute com alguém enquanto tenta resolver sua lição de casa). Em segundo lugar, não há pessoas bonitas escondidas em uma matriz matemática. Nenhuma mulher bonita e nenhum galã forte vestindo calças brilhantes de vinil preto brigando pelo futuro da humanidade – só um monte de números escritos em linhas e colunas. Na verdade, a pessoa mais atraente em uma matriz matemática provavelmente é o seu professor de matemática, e as únicas calças que ele já vestiu podem ser descritas de forma mais precisa como "amarronzadas".

Apesar do domínio da matriz matemática não ser emocionante, desafiador, ou cheio de efeitos especiais que custam milhões de dólares, ainda assim é bem legal. Elas são completamente diferentes dos tópicos do Capítulo 1 ao 8 e dos outros que você verá nos capítulos seguintes. E, apesar de serem completamente alienígenas, elas têm usos surpreendentes. Você irá usá-las até mesmo para resolver sistemas de equações (caso as três técnicas que você aprendeu no Capítulo 8 não forem satisfatórias).

O que é a Matriz?

Colocada de forma simples, a *matriz* é um grupo de valores, chamados elementos, organizados em linhas e colunas e cercados com colchetes. A *ordem* de uma matriz descreve o número de linhas e colunas que ela contém. Considere a matriz *A*, como definida abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 9 \\ -8 & -6 & 4 & 7 & 13 \\ -20 & -3 & 8 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz *A* tem a ordem 3 × 5 (leia-se "3 por 5"), porque ela contém três linhas e cinco colunas (os números na horizontal são as linhas e os números na vertical são as colunas). Ao escrever a ordem de uma matriz, você sempre colocará o número de linhas antes do número de colunas. Se uma matriz tem um número igual de linhas e colunas, diz-se ser uma matriz *quadrada*.

Fale a Linguagem

Uma **matriz** é uma coleção retangular de valores, chamados de elementos, que são organizados em linhas e colunas e cercados por colchetes. Se uma matriz tem *m* linhas e *n* colunas, dizemos que a **ordem** da matriz é *m* x *n*; se a matriz tem o mesmo número de linhas e colunas é chamada de **quadrada**.

Ponto Crítico

Você pode lembrar que colunas são verticais porque ambas contêm a letra c.

"Se você calcular o valor individual de uma matriz, use anotação a_{ij} onde *i* é a linha do elemento e *j* a sua coluna. Por exemplo, a matriz A sobre, a_{24}=7 porque o número 7 aparece na segunda linha e quarta coluna da matriz. Note que a variável minúscula costuma representar os pares de elementos , a variável maiúscula do nome da matriz (*a* e *A*)."

Operações da Matriz

Apesar de haver excelentes cursos de faculdades inteiramente dedicados a matrizes, em álgebra você só precisa realizar algumas operações com matrizes.

Multiplicando por um Escalar

A operação mais simples da matriz requer que você multiplique todos os números dela por um número real separado, chamado de *escalar*. É como a propriedade distributiva em grande escala. Multiplique tudo da matriz por um escalar e escreva os produtos na mesma ordem da matriz original.

Fale a Linguagem

Um **escalar** é um número real. Você usa o termo "escalar" para indicar que o número não está dentro da matriz, ao contrário de um "elemento", que está.

Exemplo 1: Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, calcule $-2A$.

Solução: Esse problema pede que você multiplique todos os elementos da matriz A pelo valor escalar -2. É uma tarefa muito simples – apenas seja cuidadoso com os sinais enquanto você multiplica.

$$-2A = \begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)(3) & (-2)(6) \\ (-2)(-4) & (-2)(0) & (-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -2 & 7 & -3 \\ 11 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, calcule $4B$.

Adicionando e Subtraindo Matrizes

Para adicionar duas matrizes, tudo o que você precisa fazer é adicionar seus elementos correspondentes. Em outras palavras, se pedem para você adicionar as matrizes A e B para obter uma matriz C, comece adicionando o elemento de cima à esquerda da matriz A ao elemento de cima à esquerda da matriz B, e escreva o resultado em cima à esquerda na matriz C. Repita esse processo para cada par de elementos nos pontos correspondentes.

Alerta do Kelley

Você só pode adicionar e subtrair as matrizes A e B se elas tiverem a mesma ordem. Se uma possui mais linhas e colunas do que a outra, nem a soma nem a diferença das matrizes são definidas.

Subtrair matrizes não é diferente. Você só usa a palavra "subtração" se você está multiplicando uma das matrizes por um valor escalar negativo, como no Exemplo 2(b).

Exemplo 2: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 6 & -4 & 13 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, calcule as expressões seguintes.

a. $A + B$

Solução: Adicione cada elemento de A ao elemento correspondente de B e escreva o resultado na mesma posição na matriz resposta.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+10 & 5+8 & -9+(-5) \\ 6+4 & -4+3 & 13+(-1) \\ 2+0 & -2+2 & 3+6 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -14 \\ 10 & -1 & 12 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

b. $2A - B$

Solução: Nessa expressão, os elementos de A são multiplicados por um valor escalar 2, e os elementos de B são multiplicados por um valor escalar –1. Comece realizando a multiplicação escalar.

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -18 \\ 12 & -8 & 26 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad -B = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 5 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Não pense "Eu preciso subtrair as matrizes para obter $2A - B$". Em vez disso, pense "Para obter $2A - B$, eu devo adicionar as matrizes $2A$ e $-B$".

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -18 \\ 12 & -8 & 26 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 & 5 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2+(-10) & 10+(-8) & -18+5 \\ 12+(-4) & -8+(-3) & 26+1 \\ 4+0 & -4+(-2) & 6+(-6) \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -13 \\ 8 & -11 & 27 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$, calcule 4A — 3B.

Multiplicando Matrizes

A coisa mais complicada que você precisará fazer com matrizes é calcular os seus produtos. Infelizmente, a multiplicação de matrizes não funciona como a adição – você não pode simplesmente multiplicar os elementos correspondentes.

Quando você pode multiplicar matrizes?

Uma das maiores diferenças entre a multiplicação e a adição de matriz é que a multiplicação não exige que as duas matrizes envolvidas tenham que ter a mesma ordem. Em vez disso, a multiplicação tem a sua própria exigência: o número de *colunas* na primeira matriz deve ser igual ao número de *linhas* na segunda matriz. Em outras palavras, se a matriz A é de ordem $m \times n$ e a matriz B de ordem $p \times q$, para o produto de $A \cdot B$ poder existir, n e p devem ser iguais.

E aqui está outro pequeno detalhe: se o produto das duas matrizes existe, ele terá que ter o mesmo número de linhas da primeira matriz e o mesmo número de colunas da segunda. Em outras palavras, se a matriz A é de ordem $m \times n$ e a matriz B é de ordem $n \times p$, $A \cdot B$ terá a ordem $m \times p$.

Alerta do Kelley

O Exemplo 3 demonstra um ponto muito importante – a multiplicação matriz não é comutativa. Só porque o produto de A · B existe, não há garantias de que o produto de B · A também exista.

Exemplo 3: Se a matriz C é de ordem 4 x 5 e a matriz D tem a ordem 5 x 9, o produto de $C \cdot D$ existe? Se sim, descreva a ordem do produto. O produto de $D \cdot C$ existe? Se sim, descreva a sua ordem.

Solução: Para o produto da matriz existir, o número de *colunas* da matriz à esquerda deve ser igual ao número de *linhas* da matriz à direita. Isso é verdadeiro para $C \cdot D$ (C tem cinco colunas e D tem cinco linhas), então o produto existe. Além disso, $C \cdot D$ terá a ordem 4×9, o mesmo número de linhas que C e o mesmo número de colunas que D.

Por outro lado, $D \cdot C$ não existe, porque a matriz D tem nove colunas, mas a matriz C tem apenas quatro linhas.

Você Tem Problemas

Problema 3: Se A é uma matriz 3 x 4 e B é uma matriz 3 x 3, qual produto existe: $A \cdot B$ ou $B \cdot A$? Qual é a ordem do produto da matriz?

Use Seus Dedos para Calcular o Produto da Matriz

Se as matrizes A e B atendem às exigências de linha/coluna e o produto da matriz P existe $(A \cdot B = P)$, você terá bastante trabalho no cálculo de cada elemento de P. A melhor maneira de aprender como multiplicar é através de um exemplo. Tudo o que precisa é de um pouco de paciência, dois dedos e o Anel do Poder forjado nas entranhas ardentes de Mordor (apesar de a exigência final se aplicar apenas se você for o Frodo Bolseiro).

Exemplo 4: Calcule o produto.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & -9 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução: A primeira matriz é 2 × 2 e a segunda é 2 × 3. Porque o número de colunas na matriz à esquerda corresponde ao número de linhas na matriz à direita, o produto da matriz 2 × 3 existe. Comece criando uma matriz 2 × 3 com o nome genérico para seus elementos.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix}$$

Cada termo é escrito na forma a_{ij}, onde i indica a linha do elemento e j indica a sua coluna.

Aqui está a chave para multiplicar matrizes: cada termo a_{ij} é o resultado da soma da multiplicação dos números da i-ésima linha da primeira matriz pelo número correspondente da j-ésima coluna da segunda matriz. Confie em mim, eu sei que isso realmente soa estranho e complicado, mas não é (ou pelo menos não será depois que eu explicar um pouco mais).

Os dois números pequenos depois de cada a no produto da matriz genérica dizem aonde colocar seus dedos ao calcular a resposta. O número pequeno da *esquerda* diz para você colocar o seu indicador *esquerdo* no número mais à *esquerda* nessa linha numerada da matriz da esquerda. O número pequeno à *direita* diz para você colocar o seu indicador *direito* em cima dessa coluna numerada na matriz da *direita*.

Você precisará fazer isso com todos os termos *a* do produto da matriz, mas, como exemplo, eu irei calcular o termo a_{13}. O número pequeno à esquerda é 1, então, coloque o seu indicador esquerdo no termo mais à esquerda na *primeira* fileira da matriz à esquerda (o número 2, neste exemplo). Já que o número pequeno da direita é 3, coloque o seu indicador direito no número acima da *terceira* coluna da matriz à direita (o número –9, neste exemplo). As posições corretas dos dedos são ilustradas na Figura 9.1.

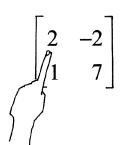
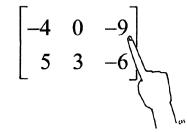



Figura 9.1

Para calcular a_{13}, seus indicadores esquerdo e direito devem pairar sobre as matrizes assim.

Para realmente calcular a_{13}, multiplique os números que você está apontando: 2(–9) = –18. Agora, mova o seu dedo esquerdo ao longo da linha, para o próximo número (–2), e mova o seu dedo direito ao longo da coluna, para o próximo número (-6), e multiplique estes números: (–2)(–6) = 12. Continue fazendo isso até que você tenha chegado simultaneamente ao fim da linha da matriz à esquerda e da coluna da matriz à direita (que foi exatamente o que acabou de acontecer) e, depois, adicione todos os produtos obtidos ao longo do caminho.

Ponto Crítico

Agora, você sabe por que o número de colunas da primeira matriz deve ser correspondente ao número de linhas da segunda, no caso da multiplicação de matrizes. Isso garante que seus dedos chegarão ao final de uma linha e à parte inferior da coluna simultaneamente.

$$p_{13} = -18 + 12$$
$$p_{13} = -6$$

Aqui está a má notícia: isso é apenas um número terminado no produto da matriz! Você terá que seguir esse mesmo processo mais cinco vezes para achar os outros cinco elementos do produto final. Apenas se certifique de entender o processo de apontar. Aqui está como obter um desses cinco valores restantes, o elemento a_{21}. Coloque o seu indicador esquerdo no elemento 1 (o número mais à esquerda na *segunda* linha da matriz à esquerda) e seu indicador direito no elemento –4 (o número mais acima na coluna *um* da matriz à direita). Mova seu dedo esquerdo

horizontalmente e seu dedo direito verticalmente (multiplicando pares de números enquanto isso).

$$p_{21} = 1(-4) + 7(5)$$
$$p_{21} = -4 + 35$$
$$p_{21} = 31$$

Quando você calcula todos os elementos do produto da matriz de uma vez, se parece com isso:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & -9 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-4)+(-2)(5) & 2(0)+(-2)(3) & 2(-9)+(-2)(-6) \\ 1(-4)+7(5) & 1(0)+7(3) & 1(-9)+7(-6) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -8-10 & 0-6 & -18+12 \\ -4+35 & 0+21 & -9-42 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -18 & -6 & -6 \\ 31 & 21 & -51 \end{bmatrix}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Calcule o produto.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinando Determinantes

Uma *determinante* é um valor de número real que é definido apenas para matrizes quadradas. No momento, não se concentre no *porquê* de você ter que achar determinantes – se concentre em *como* achá-los. (A próxima seção explicará um bom uso para os determinantes, então, reprima a sua curiosidade o máximo possível). Além disso, se você está ficando frustrado, não se pergunte: "Por que eu devo aprender álgebra?". Ao invés disso, pergunte-se: "Como posso ser atraente se eu decidir calcular o produto de matrizes?". Pensar assim é bom para o ego e os matemáticos usam isso o tempo todo. Viva a autoilusão!

Fale a Linguagem

Toda matriz quadrada tem um número real associado a ela, chamado de **determinante**; você o usará para resolver sistemas de equações lineares mais tarde, neste capítulo.

Apesar de todas as matrizes quadradas terem determinantes, neste livro de álgebra, nos concentramos em matrizes 2 × 2 e 3 × 3.

Conforme as dimensões ficam maiores, o processo se torna marcadamente mais difícil; por isso, ele é geralmente discutido em cursos mais avançados, como pré-cálculo.

Para indicar que você está calculando o determinante de uma matriz, desenhe linhas finas (que se parecem bastante com barras de valor absoluto, mas que definitivamente não o são) nos dois lados da matriz, ao invés de colchetes. Por exemplo, para indicar o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, você escreverá $|A|=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$.

Determinantes 2 × 2

O determinante da matriz 2 × 2 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é igual a $ad - cb$. Em outras palavras, multiplique diagonalmente e depois subtraia os resultados, como ilustrado na Figura 9.2.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Figura 9.2

Subtraia os produtos dos números diagonais para obter o determinante de uma matriz 2 × 2.

Exemplo 5: Se $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, calcule $|A|$.

Solução: Pense nas linhas diagonais da Figura 9.2, que indicam que você deve multiplicar 4(–5) e depois subtrair –2(6). Não se esqueça do sinal de subtração entre 4(–5) e –2(6), que a fórmula exige. Apesar de –2(6) = –12 ser um número negativo, você ainda tem que subtraí-lo.

$$|A| = 4(-5) - (-2)(6)$$
$$|A| = -20 - (-12)$$
$$|A| = -20 + 12$$
$$|A| = -8$$

Alerta do Kelley

Certifique-se de subtrair na ordem certa ao calcular um determinante 2 × 2, ou você sempre obterá o sinal errado na sua resposta. Sempre subtraia o produto da diagonal para cima.

Você Tem Problemas

Problema 5: Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Determinantes 3 × 3

Apesar de o cálculo de determinantes de matrizes 3 × 3 exigir um pouco mais de trabalho, você fará predominantemente as mesmas coisas que fez com determinantes 2 × 2. Em outras palavras, ainda multiplicará em diagonais e subtrairá esses produtos; na verdade, subtrairá apenas as diagonais que apontam para cima e à direita, como nos determinantes 2 × 2. Entretanto, você terá que reescrever a matriz 3 × 3 antes de fazer qualquer coisa.

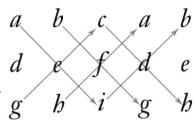
Aqui está como calcular o determinante da matriz 3 × 3: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

1. **Copie as duas primeiras colunas da matriz.** Adicione uma quarta e uma quinta coluna à matriz. A quarta coluna é uma cópia da primeira coluna, e a quinta é uma cópia da segunda.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

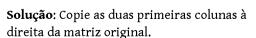
2. **Multiplique ao longo das diagonais.** Em determinantes 2 × 2, você multiplica diagonalmente para baixo e depois subtrai a diagonal para cima. Similarmente, em matrizes 3 × 3, você multiplica diagonalmente para baixo três vezes (adicionando os resultados) e depois subtrai as três diagonais para cima, como ilustrado na Figura 9.3.

Figura 9.3

Multiplique ao longo destas diagonais para calcular o determinante de uma matriz 3 × 3. Certifique-se de subtrair o produto de cada diagonal que aponta para cima.

Multiplique ao longo das diagonais na Figura 9.3.

$$|A| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exemplo 6: Calcule o determinante.

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Ponto Crítico

A maioria das calculadoras gráficas pode calcular determinantes, o que facilita a verificação das suas respostas de deveres de casa e problemas práticos.

Solução: Copie as duas primeiras colunas à direita da matriz original.

$$\begin{matrix} -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ -7 & 4 & -1 & -7 & 4 \end{matrix}$$

Multiplique ao longo das diagonais ilustradas na Figura 9.3, lembrando-se de colocar um sinal negativo na frente de cada diagonal apontada para cima.

$$\begin{aligned} &(-3)(-6)(-1) + (5)(0)(-7) + (1)(2)(4) - (-7)(-6)(1) - (4)(0)(3) - (-1)(2)(5) \\ &= -18 + 0 + 8 - (42) - (0) - (-10) \\ &= -18 + 8 - 42 + 10 \\ &= -42 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Calcule o determinante.

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 3 & -5 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Quebrando a Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um truque legal, que resolve sistemas de equações, mas eu estaria mentindo se chamasse isso de um atalho. Sinceramente, o método da eliminação do Capítulo 8 resolve sistemas de forma mais rápida, mas a Regra de Cramer é provavelmente a aplicação usual mais fácil dos determinantes e é por isso que você a acha na maioria dos cursos de álgebra.

A maior parte dos alunos de álgebra passa uma boa parte do ano se perguntando "Por que eu tenho que aprender a fazer isso?" A Regra de Cramer dá a eles a rara oportunidade de ver como aprender uma habilidade estranha, como calcular

determinantes pode ser de fato útil. É verdade que, resolver sistemas de equações não é assim tão útil no dia a dia ("Oh, não, a minha canoa rolou para o meio do rio – ainda bem que eu sei como resolver sistemas de equações, se não eu nunca chegaria à margem!"), mas pelo menos é algo concreto no enlouquecedor mundo abstrato dos conceitos algébricos.

Vamos dizer que você está tentando resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

usando a Regra de Cramer. (Repare que ambas as equações do sistema estão em forma padrão.) Esse é o seu plano de ataque:

1. **Escreva a matriz de coeficientes.** A matriz de coeficientes C é a matriz 2 × 2 que contém coeficientes x do sistema na primeira coluna e coeficientes y na segunda coluna.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

Alerta do Kelley

Se o sistema é inconsistente ou dependente, |C| será igual a 0, o que significa que a Regra de Cramer não funcionará. (Você acabará com $x = \frac{|A|}{|C|} = \frac{|A|}{0}$ e $y = \frac{|B|}{|C|} = \frac{|B|}{0}$, que são indefinidos).

2. **Substitua as colunas em C, uma de cada vez.**

   Desenhe duas novas matrizes 2 × 2, A e B, ambas baseadas na matriz de coeficientes C. Para obter a matriz A, comece com a matriz de coeficientes e substitua a primeira coluna com as constantes do sistema (os números c e f do lado direito dos sinais de igual). Em outras palavras, ao invés de a e d, na primeira coluna de A, você terá c e f. Para obter a matriz B, substitua a *segunda* coluna da matriz de coeficientes com as constantes.

$$A = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$$

3. **Calcule os determinantes das matrizes.** Para achar a solução do sistema, você precisará saber os valores de $|A|$, $|B|$ e $|C|$.

4. **Use as fórmulas da Regra de Cramer.** A solução do sistema (se ela existe) é o par de coordenadas (x,y), onde $x = \frac{|A|}{|C|}$ e $y = \frac{|B|}{|C|}$.

Há muitos passos, mas a maioria deles é muito rápido e indolor, o que fará a Regra de Cramer uma opção viável ao resolver sistemas depois que você praticar um pouco e conseguir passar pelos passos rapidamente.

Exemplo 7: Resolva o sistema usando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 4x+6y=-9 \\ 3x-8y=-13 \end{cases}$$

Solução: Crie a matriz de coeficientes C, enumerando os coeficientes x na primeira coluna e os coeficientes y na segunda.

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Você Tem Problemas

Você também pode aplicar a Regra de Cramer aos sistemas de três equações em três variáveis. Vamos dizer que você está resolvendo esse sistema pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \\ jx+ny+pz=q \end{cases}$$

A matriz de coeficientes C será 3 x 3 – três variáveis diferentes no sistema exigem três colunas na matriz de coeficientes, representando os coeficientes de x, y e z, respectivamente.

$$C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ j & n & p \end{bmatrix}$$

Crie a matriz A ao substituir a primeira coluna de C com as constantes do sistema, e crie a matriz B ao colocar essas constantes na segunda coluna como na Regra de Cramer, com matrizes 2 x 2). No entanto, o sistema exige uma quarta matriz D, na qual a terceira coluna da matriz de coeficientes é substituída pelas constantes.

$$A=\begin{bmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ q & n & p \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ j & q & p \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ j & n & q \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é:

$$x=\frac{|A|}{|C|},\quad y=\frac{|B|}{|C|},\quad z=\frac{|D|}{|C|}$$

Para criar a matriz A, substitua a primeira coluna de C com a coluna de constantes (os números −9 e −13). Para criar a matriz B, use as constantes para substituir a segunda coluna da matriz C.

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ -13 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$$

Depois, calcule os determinantes de todas as matrizes.

$$|A| = (-9)(-8) - (-13)(6) = 72 + 78 = 150$$
$$|B| = (4)(-13) - (3)(-9) = -52 + 27 = -25$$
$$|C| = (4)(-8) - (3)(6) = -32 - 18 = -50$$

Você está quase terminando. Insira os determinantes na fórmula da Regra de Cramer.

$$x = \frac{|A|}{|C|} = \frac{150}{-50} = -3$$

$$y = \frac{|B|}{|C|} = \frac{-25}{-50} = \frac{1}{2}$$

Você Tem Problemas

Problema 7: Resolva o sistema usando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 6x - 5y = -7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Matrizes são coleções retangulares de números, organizados em linhas e colunas.
- Para o produto da matriz $A \cdot B$ existir, o número de colunas em A deve ser igual ao número de linhas em B.
- Determinantes são definidos para todas as matrizes quadradas.
- A Regra de Cramer é uma técnica que resolve sistema de equações usando matrizes.

Parte 4

Agora Você Está Brincando com Potência (Exponencial)!

É hora de se separar amigavelmente das equações lineares. Você deve encontrá-las em um restaurante (assim elas não farão uma cena) e usar o velho discurso, "Não é você, sou eu". Você precisa mais da vida do que inclinações e interceptores. Você precisa de um gráfico que seja um pouco mais imprevisível, um gráfico com uma pequena curva. Nesta parte, você entrará em um estranho mundo novo de equações cujas variáveis contêm expoentes. Algumas vezes você achará tudo meio estranho e terá saudades dos dias com o seu primeiro amor linear, mas, confie em mim, isso é melhor para vocês dois.

Capítulo 10

Apresentando os Polinômios

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Classificar polinômios
- Adicionar, subtrair e multiplicar polinômios
- Calcular quocientes de polinômios com a divisão longa
- Realizar a divisão sintética

É hora de aprimorar algumas das suas habilidades algébricas do início do livro. No Capítulo 3, discutimos as leis básicas exponenciais, que nos ensinam que o produto $(2x^4)(3x^7)$ é igual a $2 \cdot 3 \cdot x^{4+7} = 6x^{11}$. No Capítulo 4, você manipulou a equação $3x = 9 + 2x$, subtraindo $2x$ dos dois lados para obter $x = 9$. O que você não sabe é que, em ambos os casos, você estava, na verdade, simplificando expressões polinomiais.

Ainda não falei realmente sobre polinômios ou entrei em maiores detalhes sobre como simplificá-los até agora, principalmente porque esses tipos de coisas que você fez nos capítulos anteriores fazem sentido intuitivamente – elas meio que "parecem certas". Claro que $5x + 9x$ deve ser igual a $14x$. Isso faz sentindo, certo? Antes que você vá além, no entanto, é hora de amarrar todas as pontas soltas e

ser específico sobre quais tipos de coisas você pode ou não adicionar juntas, e até mesmo explorar alguns tópicos complicados, como dividir expressões variáveis.

Classificação de Polinômios

Um *polinômio* é basicamente uma série de emaranhados matemáticos (chamados de *termos*) que são adicionados. Cada emaranhado individualmente consiste em uma ou mais variáveis elevadas a um expoente, geralmente com um coeficiente junto. Polinômios podem ser tão simples como a expressão $4x$, ou tão complicados quanto a expressão $4x^3 + 3x^2 - 9x + 6$.

Polinômios geralmente são escritos na forma padrão, o que significa que os termos estão listados na ordem, dos termos com o maior valor exponencial ao termo com o menor exponencial. Porque o termo que tem a variável elevada à maior potência é listado primeiro na forma padrão, seu coeficiente é chamado de *coeficiente principal*. Um termo que não possui uma variável é chamado de *constante*.

Fale a Linguagem

Um **polinômio** é a soma de emaranhados algébricos diferentes (chamados de **termos**), em que cada um consiste em números e/ou variáveis elevados a potências exponenciais. O maior expoente em um polinômio é chamado de **grau**, e o coeficiente de uma variável elevado a esse expoente é chamado de **coeficiente principal**. A **constante** de um polinômio é o termo com nenhuma variável.

Por exemplo, se você fosse escrever o polinômio $2x^3 - 7x^5 + 8x + 1$ na forma padrão, iria se parecer com isso: $-7x^5 + 2x^3 + 8x + 1$. (Repare que a variável de cada termo tem uma potência menor, em relação ao termo que está imediatamente à sua esquerda.) O grau desse polinômio é 5, seu coeficiente principal é -7 e a constante no polinômio é 1.

Tecnicamente, uma constante *tem* uma variável ligada a ela, mas a variável é elevada à potência 0. Por exemplo, você poderia reescrever o polinômio simples $2x + 1$ como $2x + 1x^0$, mas, já que $x^0 = 1$ (e qualquer coisa multiplicada por 1 é igual a ela mesma), não há razão para escrever x^0 no final do polinômio.

Como há tantos tipos diferentes de polinômios (52 sabores na última contagem, incluindo pistache), há duas técnicas que são usadas para classificá-los: uma é baseada no número de termos que um polinômio possui (veja a Tabela 10.1) e a outra é baseada no grau do polinômio (veja a Tabela 10.2).

Tabela 10.1 – Classificando um Polinômio pelo seu Número de Termos

Número de Termos	Classificação	Exemplo
1	monômio	$19x^2$
2	binômio	$3x^3 - 7x^2$
3	trinômio	$2x^2 + 5x - 1$

Repare que a Tabela 10.1 só classifica polinômios com três termos ou menos. Polinômios com quatro ou mais termos são classificados conforme o grau (como pode ser verificado na Tabela 10.2) ou apenas descritos com o rótulo super genérico (e não muito útil) de "polinômios". (É tão específico quanto classificar você como "ser humano").

Tabela 10.2 – Classificando polinômios pelo seu grau

Grau	Classificação	Exemplo
0	constante	$2x^0$ ou 2
1	linear	$6x^1 + 9$ ou $6x + 9$
2	quadrático	$4x^2 - 25x + 6$
3	cúbico	$x^3 - 1$
4	quártico	$2x^4 - 3x^2 + x - 8$
5	quinto grau	$3x^5 - 7x^3 - 2$

Há mais classificações por graus de polinômios, mas essas listadas na Tabela 10.2 são de longe as mais usadas.

Ao classificar um polinômio, você não precisa escolher um método ou outro. Na verdade, usar os dois, quando possível, ajudá-lo-á a visualizar melhor.

Exemplo 1: Classifique os seguintes polinômios.

a. $3 - 4x - 6x^2$

Ponto Crítico

Se pedirem para você classificar um polinômio como $3x^3y^2 - 4xy^3 + 6x$ (que contém mais de um tipo de variável em alguns ou em todos os seus termos) de acordo com o seu grau, adicione os expoentes de cada termo juntos. O maior total é o grau. O grau de $3x^3y^2 - 4xy^3 + 6x$ é 5, porque o maior total exponencial vem do primeiro termo: 3+ 2 = 5.

Solução: Esse polinômio tem três termos, então, é um trinômio. Além disso, seu grau é 2, o que o faz quadrático. Logo, ele é um trinômio quadrático. Quando você usar duas classificações de uma só vez, escreva a classificação de grau depois, porque ela é um adjetivo ("quadrático trinômio" simplesmente não soa bem).

b. 13

Solução: Há apenas um termo e ele não tem nenhuma variável explícita. Logo, os termos 13 e $13x^0$ significam a mesma coisa, e os dois são constantes monomiais.

Você Tem Problemas

Problema 1: Classifique os polinômios a seguir:

a. $4x^3 + 2$

b. $11x$

Adição e Subtração de Polinômios

Nos capítulos anteriores, você simplificou expressões como $3x + 7x$ para obter $10x$, ou, talvez, subtraiu termos como $5y - 9y$ para obter $-4y$. A aritmética faz todo o sentido se você traduzir matemática em palavras. Por exemplo, a expressão $3x + 7x$ literalmente significa "três vezes um certo número adicionando sete vezes este mesmo número" que é igual a "dez vezes esse número", ou $10x$.

Só é permitido que você combine os coeficientes desses termos porque eles contêm *as mesmas variáveis*. Quaisquer dois termos que possuem *exatamente* a mesma variável são chamados de *termos iguais*.

Se dois termos têm as mesmas variáveis e ficam nervosos ao se olharem, você pode promovê-los, de termos ***iguais*** para termos *amantes*, mas é difícil de ler as emoções das variáveis (elas estão sempre mudando), então, a maioria dos matemáticos não se incomodam em fazer essa distinção.

Logo, a expressão $13x^2y^3 - 5x^2y^3$ pode ser simplificada como $8x^2y^3$. As variáveis nos dois termos são exatamente correspondentes

Fale a Linguagem

Termos iguais têm variáveis que são exatamente correspondentes, como $4x^2y^3$ e $-7x^2y^3$. Você pode apenas adicionar e subtrair dois termos se eles são iguais.

ATENÇÃO

Alerta do Kelley

Muitos alunos tentam simplificar a expressão $4x + 5y$ como $9xy$, mas isto está errado! Você não pode adicionar ou subtrair $4x$ e $5y$ porque esses termos têm variáveis diferentes. Seria como adicionar quatro gatos a cinco cachorros e obter nove gachorros (ou catos). Termos diferentes são como maçãs e laranjas – você não pode combiná-las.

(as duas contêm x^2y^3), então, tudo o que você precisa fazer é combinar os coeficientes (13 – 5 = 8) e juntar a uma cópia das variáveis correspondentes.

Exemplo 2: Simplifique a seguinte expressão.

$$4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 - (2x^3 - 8x^2 + 9x - 6)$$

Solução: Comece aplicando a propriedade distributiva – multiplique tudo dentro dos parênteses por –1.

$$4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 - 2x^3 + 8x^2 - 9x + 6$$

Reescreva a expressão de forma que todos os termos iguais fiquem agrupados; isso torna a simplificação mais fácil.

$$4x^3 - 2x^3 + 5x^2 + 8x^2 - 3x - 9x + 1 + 6$$

Combine os termos iguais

$$(4 - 2)x^3 + (5 + 8)x^2 + (-3 - 9)x + (1 + 6)$$
$$= 2x^3 + 13x^2 - 12x + 7$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique a expressão $3x^2 - 9 + 2(x^2 - 6x + 5)$.

Multiplicação de Polinômios

Diferentemente da adição e da subtração, você não precisa de termos iguais para multiplicar polinômios (nem precisa de termos iguais para dividi-los – mais sobre isso no próxima seção). Isso torna a multiplicação de polinômios bastante fácil. Tudo o que você precisa fazer é aplicar as regras exponenciais e a propriedade distributiva do Capítulo 3.

Produtos de Monômios

Veja o que você deve fazer para multiplicar dois monômios:

1. **Multiplique seus coeficientes.** O resultado é o coeficiente da resposta.
2. **Liste todas as variáveis que aparecem nos dois termos.** Escreva essas variáveis à direita do coeficiente que você obteve no primeiro passo, preferencialmente em ordem alfabética.

Como Eles Fazem Isso?

Você adiciona as potências das variáveis correspondentes no terceiro passo por causa da regra exponencial $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. (o produto das expressões exponenciais com bases correspondentes são iguais à base comum elevada à soma das potências).

3. **Adicione as potências.** Combine os expoentes de cada variável individualmente e escreva estes totais acima das variáveis na resposta.

Mesmo que esses passos pareçam estranhos a princípio, não se preocupe. A multiplicação de monômios é uma habilidade que você aprenderá rapidamente.

Exemplo 3: Calcule os seguintes produtos:

a. $(-3x^2y^3z^5)(7xz^3)$

   Solução: Comece multiplicando os coeficientes $-3 \cdot 7 = -21$. Em seguida, liste todas as variáveis que aparecem no problema em ordem alfabética. Não importa que o segundo monômio não contenha y. Desde que uma variável apareça em algum lugar no problema, você deve escrevê-la próxima ao coeficiente que acabou de calcular.

   $$-21xyz$$

   Adicione os expoentes para cada variável listada. A expressão $-3x^2y^3z^5$ contém x elevado à segunda potência, e $7xz^3$ contém x elevado à primeira potência. Logo, o seu produto conterá x à potência $2 + 1 = 3$. Similarmente, a potência de z na resposta deve ser 8, já que os monômios contêm z^5 e z^3. Há apenas um termo y (y^3), então, apenas copie a sua potência para a resposta final.

   $$-21x^3y^3z^8$$

b. $3w^2x(2wxy - x^2y^2)$

   Solução: Aplique a propriedade distributiva, multiplicando os dois termos por $3w^2x$.

   $$3w^2x(2wxy) + 3w^2x(-x^2y^2)$$

   Calcule cada produto separadamente.

   $$3 \cdot 2 \cdot w^{2+1} \cdot x^{1+1} \cdot y + 3(-1) \cdot w^2 \cdot x^{1+2} \cdot y^2$$
   $$= 6w^3x^2y - 3w^2x^3y^2$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule o produto de $3x^2y(5x^3 + 4x^2y - 2y^5)$.

Binômios, Trinômios e Além

É libertador não precisar de termos iguais para multiplicar polinômios. No entanto, os exemplos até agora só lidaram com a multiplicação de monômios. Felizmente, a multiplicação de polinômios com múltiplos termos também não é muito difícil – você usará apenas uma versão levemente modificada da propriedade distributiva.

Graças à propriedade distributiva, você sabe que $a(b + c)$ é igual a $ab + ac$. Distribuir a significa que você está multiplicando cada termo dentro dos parênteses por a. De forma parecida, você pode multiplicar os binômios $a + b$ e $c + d$. Ao invés de distribuir um único monômio, você distribui cada termo do primeiro binômio por cada termo do segundo binômio, um de cada vez. Em outras palavras, multiplique os termos de $c + d$ por a e depois volte e multiplique os dois termos por b.

$$ac + ad + bc + bd$$

Ponto Crítico

Alguns professores de álgebra se concentram no método PSTU, uma técnica de multiplicação para dois binômios. Cada letra representa um par de termos nos binômios – o primeiro, segundo, terceiro e último termos.

Se você nunca escutou sobre o PSTU, está tudo bem, porque ele só funciona quando você está multiplicando dois binômios, enquanto a minha técnica de distribuição múltipla funciona para todos os produtos polinomiais. Além disso, se usar o meu método para multiplicar binômios, acabará obtendo os mesmos resultados que conseguiria com o método PSTU.

Então você ainda está distribuindo – só que está fazendo isso duas vezes. E se quiser multiplicar um trinômio por um trinômio? Siga os mesmos procedimentos, distribuindo cada termo do primeiro polinômio por cada termo do segundo, um de cada vez.

$$(a + b + c)(d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$$

Caso você esteja se perguntando, o número de termos nos polinômios que está multiplicando não precisam ser correspondentes. É possível multiplicar um binômio por um trinômio com a mesma facilidade, como você verá no Exemplo 4.

Exemplo 4: Expanda e simplifique a expressão $(x - 2y)(x^2 + 2xy - y^2)$.

Solução: Os dois termos do polinômio à esquerda (x e $-2y$) devem ser distribuídos no segundo polinômio, um de cada vez.

$$(x)(x^2)+(x)(2xy)+(x)(-y^2)+(-2y)(x^2)+(-2y)(2xy)+(-2y)(-y^2)$$
$$=x^{2+1}+2x^{1+1}y-xy^2-2x^2y-2\cdot 2xy^{1+1}+2y^{1+2}$$
$$=x^3+2x^2y-xy^2-2x^2y-4xy^2+2y^3$$

Alerta do Kelley

Depois de multiplicar polinômios, sempre confira se você pode simplificar o resultado. Todos os professores de álgebra exigem respostas simplificadas, e se você não cumprir isso, eles podem considerar a resposta errada, tiram pontos e, em casos extremos, ficam com tanta raiva que enviam um organismo cibernético de volta no tempo para aniquilá-lo antes que você seja inscrito na aula deles

Agora combine termos iguais. Se você prestar atenção, verá que $2x^2y$ e $-2x^2y$ têm a mesma variável, podendo ser combinados para se obter 0 (eles são opostos um do outro e logo se cancelam). Combine, também, os termos $-xy^2$ e $-4xy^2$ para ter $-5xy^2$.

$$x^3-5xy^2+2y^3$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Expanda e simplifique a expressão $(2x+y)(x-3y)$.

Divisão de Polinômios

Há duas técnicas que você pode usar para dividir polinômios. Uma (que parecerá um pouco familiar) funciona com todos os problemas de divisão polinomiais, mas demora um pouco, enquanto a outra é mais rápida, mas só funciona em circunstâncias específicas.

Divisão Longa

Apesar de ser um pouco incômoda, a forma mais confiável de dividir polinômios é com a antiquada divisão longa. Ela funciona exatamente da mesma forma que a técnica que você aprendeu na escola primária para dividir números – então ela pode parecer familiar.

Exemplo 5: Calcule o quociente de $(x^3 + 5x^2 - 3x + 4) \div (x^2 + 1)$.

Solução: Comece reescrevendo o problema na notação de divisão longa. O dividendo (o polinômio que será dividido) vai para a esquerda e o divisor (o polinômio que divide) vai à direita, dentro da chave. Ao reescrever os polinômios, certifique-se de estarem na forma padrão.

Fale a Linguagem

O quociente $a \div b$, também escrito como $b\overline{)a}$, tem o **divisor** b e o **dividendo** a.

Neste problema, o divisor $x^2 + 1$ não possui o termo x. Escreva o termo x ausente com o coeficiente zero, senão, as coisas não se alinharão corretamente.

$$x^3 + 5x^2 - 3x + 4 \quad \left| \underline{x^2 + 0x + 1} \right.$$

O primeiro termo do divisor é o x^2 e o primeiro termo do dividendo é o x^3. Pense assim: "Qual número multiplicado por x^2 resulta em x^3?". A resposta é x. Escreva a resposta abaixo da chave, alinhada com $0x$, pois possuem expoentes de mesmo grau.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & \underline{x^2 + 0x + 1} \\ & \quad x \end{array}$$

Multiplique x por cada termo do divisor e escreva o resultado embaixo do dividendo, alinhando cada termo conforme o grau dos expoentes x. Desenhe uma linha horizontal sob o produto.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & \underline{x^2 + 0x + 1} \\ \underline{x^3 + 0x^2 + x} \quad\quad & \quad x \end{array}$$

Multiplique o produto por –1 e depois some com os termos iguais do dividendo. Escreva o resultado sob a linha horizontal.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & \underline{x^2 + 0x + 1} \\ \underline{x^3 + 0x^2 + x} \quad\quad & \quad x \\ 5x^2 - 4x + 4 & \end{array}$$

Como Eles Fazem Isso?

Você se pergunta "Quantas vezes x^2 me dará exatamente x^3?", porque você está tentando eliminar o primeiro termo do dividendo.

Copie o termo independente do dividendo. Repita o processo se perguntando: "Qual número multiplicado por x^2 resulta em $5x^2$?". A resposta é 5. Escreva esse número sob a chave, alinhado com o termo 1, por serem termos semelhantes, ou

seja, constantes.Multiplique por cada termo do divisor e escreva o resultado sob o dividendo, mudando cada termo do produto para seu oposto. Em seguida, some com o dividendo.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 0x^2 + x \quad\quad} & x + 5 \\ 5x^2 - 4x + 4 & \\ \underline{-5x^2 - 0x - 5} & \\ -4x - 1 & \end{array}$$

Se houvesse mais termos no dividendo, você repetiria o processo com cada um deles,um de cada vez. Contudo, já que o último termo do dividendo utilizado foi a constante 4, você terminou. O quociente é a quantidade sob a chave, que vale $(x + 5)$ e o resto dessa divisão é o $-4x - 1$.

Escreva a resposta como o quociente mais uma fração, cujo numerador é o resto e o denominador é o divisor original.

$$x + 5 + \frac{-4x - 1}{x^2 + 1}$$

Verifique sua resposta multiplicando o quociente, $x + 5$, pelo divisor original, $x^2 + 1$, e depois adicione o resto.

$$\begin{aligned} &(\text{quociente})(\text{divisor}) + \text{resto} \\ &= (x + 5)(x^2 + 1) + (-4x - 1) \\ &= x^3 + x + 5x^2 + 5 - 4x - 1 \\ &= x^3 + 5x^2 + x - 4x + 5 - 1 \\ &= x^3 + 5x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

Se você fez tudo certo, obterá o dividendo original. Isso foi exatamente o que aconteceu aqui; então, aproveite a grandeza do seu poder matemático, tendo a certeza de que você é o máximo.

Você Tem Problemas

Problema 5: Calcule o quociente de $(x^2 - 7x + 8) \div (x + 4)$.

Divisão Sintética

Ao dividir por um binômio linear (como $x + 2$ ou $x - 5$), a *divisão sintética* é a forma mais fácil de se chegar à resposta. Por exemplo, o problema de divisão $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \div (x + 3)$ é um candidato ideal para a divisão sintética, mas o problema $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \div (x^2 + 3)$ não o é, porque o divisor não é linear. Resumindo, ela funciona quando você divide por "x + um número" ou "x – um número".

A divisão sintética é muito mais simples do que a divisão longa. Poucos segundos brincando com alguns coeficientes é o que demora para calcular o quociente. Eu não sei o porquê de ela ser chamada de divisão "sintética" – não é artificial, cheia de conservantes ou falsa. Ela nunca foi a um cirurgião plástico para dar uma puxada, retocada, colocar um implante ou fazer uma redução; então, esse nome me confunde. Como a divisão longa, a melhor maneira de aprender esse processo é através de um exemplo. E então, vamos lá.

Fale a Linguagem

A **divisão sintética** é uma maneira rápida de calcular quocientes polinomiais quando o divisor é um binômio linear.

Exemplo 6: Calcule o quociente de $(2x^3 - x + 4) \div (x + 3)$.

Solução: Verifique se não há nenhuma potência faltante de x no dividendo. Hmmm, não há nenhum termo x^2 em $2x^3 - x + 4$, então, insira-o com um coeficiente 0 (exatamente como você fez na divisão longa) para obter um dividendo de $2x^3 + 0x^2 - x + 4$. Liste esses coeficientes em ordem, começando com o maior expoente e indo até o menor.

$$2 \quad 0 \quad -1 \quad 4$$

À esquerda dessa lista, escreva o *oposto* da constante do divisor. Neste caso, o divisor é $x + 3$, logo, seu oposto é –3. Separe-o dos outros coeficientes, escrevendo-o assim: $\underline{-3|}$. Deixe uma linha de espaço e desenhe uma linha horizontal.

$$\underline{-3|} \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 4$$

Ponto Crítico

Apesar de as divisões sintéticas poderem ser aplicadas apenas quando você está dividindo um binômio linear, elas serão extremamente úteis no Capítulo 14.

As configurações estão completas. É hora de começar. Pegue o coeficiente principal do dividendo (2) e coloque-o abaixo da linha horizontal.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Multiplique o número na caixa (–3) pelo número abaixo da linha (2) e escreva o resultado (–6) abaixo do próximo coeficiente (0).

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{-3} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ & & -6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Some os números da segunda coluna ($0 - 6 = -6$) e escreva o resultado embaixo dessa coluna, abaixo da linha horizontal.

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{-3} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ & & -6 & & \\ \hline & 2 & -6 & & \end{array}$$

Repita esse processo mais duas vezes, cada vez multiplicando o número na caixa pelo novo número abaixo da linha, escrevendo o resultado na próxima coluna, somando os números de cada coluna e escrevendo o resultado abaixo da linha horizontal.

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{-3} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ & & -6 & 18 & -51 \\ \hline & 2 & -6 & 17 & -47 \end{array}$$

Os números abaixo da linha são os coeficientes do quociente, começando com x^2, que é um grau menor que o do dividendo: $2x^2 - 6x + 17$. O número restante mais à direita (–47) é o resto, que é escrito da mesma forma que na divisão longa.

$$2x^2 - 6x + 17 + \frac{-47}{x+3}$$

A resposta final $2x^2 - 6x + 17 - \frac{47}{x+3}$ está igualmente correta – é permitido que você mova o sinal negativo do numerador, se quiser. Você pode verificar sua resposta final da mesma maneira que fez na divisão longa. Multiplique o quociente pelo divisor e adicione o resto; você deverá acabar com o dividendo original.

$$\begin{aligned} &(2x^2 - 6x + 17)(x+3) + (-47) \\ &= 2x^2(x) + 2x^2(3) + (-6x)(x) + (-6x)(3) + 17(x) + 17(3) - 47 \\ &= 2x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 18x + 17x + 51 - 47 \\ &= 2x^3 - x + 4 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Calcule o quociente de $(4x^3 - 2x^2 - 10x + 1) \div (x - 2)$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Se dois termos em um polinômio têm variáveis que são exatamente correspondentes, eles são termos iguais.
- Apenas termos iguais podem ser adicionados ou subtraídos.
- A multiplicação de polinômios pode ser feita através da distribuição de cada termo do polinômio à esquerda para cada termo do polinômio à direita, um de cada vez.
- A divisão longa calcula corretamente qualquer quociente polinomial, mas a divisão sintética (que só funciona quando o divisor é um binômio linear) é mais rápida.

Capítulo 11

Fatorando Polinômios

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Achar os maiores fatores comuns
- Reconhecer padrões de fatoração
- Fatorar trinômios usando os seus coeficientes
- Fatorar trinômios difíceis com a técnica da bomba

Lembro-me do primeiro dia em que tentei dirigir de ré. Pensei que não seria mais difícil do que dirigir para frente (afinal de contas, andar para trás não é mais difícil do que andar para frente, então, por que dirigir seria diferente?), mas, caramba, como eu estava errado. Tudo parece diferente quando você está indo para trás. Virar o volante para a esquerda faz com que a frente do carro vá para a direita, em primeiro lugar, e demora até acostumarmos com isso. Ainda fico um pouco nervoso quando estou dando a ré; é algo completamente diferente.

O Capítulo 10 se concentrou na multiplicação de polinômios (na minha metáfora, o equivalente a dirigir). Agora é hora de darmos ré em todo esse processo e aprendermos a fatorar.

Você está se perguntando por que fatoração é o reverso da multiplicação? A fatoração pega o que antes foi um produto e o quebra em pedaços (chamados fatores), que são multiplicados para obter esse produto.

De acordo com o Capítulo 10, $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15$. Neste capítulo, você começará com $x^2 + 2x - 15$ e acabará com $(x - 3)(x + 5)$. No começo, as coisas parecerão um pouco estranhas, como dirigir em marcha à ré, mas você se acostumará rapidamente. Só não tenha medo de derrubar algumas balizas no processo – isso acontece com todo mundo.

Máximo Divisor Comum Entre Polinômios

O *máximo divisor comum* (MDC) de um polinômio é o maior monômio igualmente divisível por cada termo. Ele é muito parecido com o máximo divisor comum do Capítulo 2, "Simplificando Frações", à exceção de que os MDC's polinomiais geralmente contêm variáveis.

Veja como calcular o MDC entre polinômios:

1. **Ache o MDC dos coeficientes dos polinômios.** O MDC dos coeficientes será o coeficiente do MDC. Tente falar isso três vezes rapidamente!

2. **Identifique as potências variáveis comuns.** Observe as variáveis de cada termo dos polinômios. O MDC deve conter a menor potência de cada variável que aparece em cada termo. Isso significa que cada termo deverá conter a variável elevada, ao mínimo, a esse expoente. Isso parece complicado, mas, na verdade, é muito fácil, como você verá no Exemplo 1.

3. **Multiplique.** O produto dos passos 1 e 2 é o MDC do polinômio.

Fale a Linguagem

Fatoração é o processo de retornar um produto polinomial ao estado de pedaços não multiplicados, chamados de fatores. O **maior fator comum** de um polinômio é o maior monômio que é divisível pelos termos do polinômio.

Depois de achar o MDC de um polinômio, você está pronto para a fatoração. Escreva o MDC seguido de um par de parênteses. Dentro desses parênteses, liste o que restou de cada termo do polinômio depois de divididos pelo MDC. Em outras palavras, os parênteses apresentam o polinômio com o que o MDC "sugou".

Exemplo 1: Fatore o polinômio $6x^2y^3 - 12xy^2$.

Solução: Comece achando o MDC dos coeficientes, 6 e 12. O maior número divisível por ambos é 6. Logo, 6 é o coeficiente do MDC dos polinômios. Agora, é a vez de descobrir quais variáveis aparecem no MDC. Pergunte-se: "Quais são as

menores potências de x e y?". Os termos contêm um x^2 e um x, no qual x é a menor potência. De forma parecida, y^2 no segundo termo possui uma potência menor do que y^3 no primeiro termo.

Junte tudo. O MDC tem um coeficiente 6 e contém as variáveis xy^2; então, $6xy^2$ é o MDC. Divida os dois termos pelo MDC.

$$\begin{aligned} &\frac{6x^2y^3}{6xy^2} + \frac{-12xy^2}{6xy^2} \\ &= \frac{6}{6}x^{2-1}y^{3-2} - \frac{12}{6}x^{1-1}y^{2-2} \\ &= xy - 2 \end{aligned}$$

Você está quase acabando. Fatorar $6x^2y^3 - 12xy^2$, é reescrevê-lo como o MDC multiplicado pelos termos que você acabou de obter na divisão.

$$6xy^2(xy - 2)$$

É fácil de verificar se a sua resposta está certa. Distribua $6xy^2$ para cada termo nos parênteses e certifique-se de acabar com a expressão de origem, $6x^2y^3 - 12xy^2$.

$$\begin{aligned} &6xy^2(xy-2) \\ &= 6xy^2(xy) + 6xy^2(-2) \\ &= 6x^{1+1}y^{2+1} + (-12)xy^2 \\ &= 6x^2y^3 - 12xy^2 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Fatore os polinômios $9x^5y^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^7$.

Fatoração por Agrupamento

A fatoração por agrupamento é usada somente em circunstâncias muito específicas; e entre todas as técnicas de fatoração deste capítulo, será, provavelmente, a menos usada por você. Entretanto, quando aplicável, ela funciona, e de forma rápida.

A fatoração por agrupamento funciona melhor quando lhe é dado um polinômio com quatro termos que não compartilham de um maior fator comum. Você irá separar o maior polinômio em dois pedaços menores, cada um contendo dois termos com fatores comuns. Depois, você irá fatorar os dois em grupos menores individualmente.

Alerta do Kelley

A chave para a fatoração em agrupamento é obter dois binômios fatorados correspondentes; no Exemplo 2, os dois binômios são $x - 2$. Isso significa que, às vezes, você precisará fatorar um MDC negativo do segundo grupo (como no Exemplo 2) para fazer os binômios serem correspondentes.

Exemplo 2: Fatore o polinômio $2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$.

Solução: Infelizmente, esses termos não possuem nenhum fator em comum (exceto 1, e isso é verdadeiro para qualquer grupo de termos). Olhe o polinômio como dois grupos, cada um contendo dois termos.

$$(2x^3 - 4x^2) + (-3x + 6)$$

Repare que o grupo esquerdo tem um MDC de $2x^2$, então, fatore-o (como você fez no Exemplo 1).

$$= 2x^2(x - 2) + (-3x + 6)$$

Você pode fatorar o 3 do segundo grupo de termos, mas não é muito útil fatorar –3. Por quê? Quando você o fizer, o binômio em parênteses se *corresponde exatamente* com o binômio que você obteve ao fatorar o primeiro grupo.

$$= 2x^2(x - 2) - 3(x - 2)$$

Agora vem a parte mais confusa. Fatore o binômio $(x - 2)$ dos dois termos. Apesar de parecer estranho, fatorar alguma coisa além de um monômio é permitido. Depois que você retirar $(x - 2)$, tudo o que resta no primeiro termo é $2x^2$; e, no segundo termo, apenas –3. Termine a fatoração ao escrever $(x - 2)$, seguido desses restos em um segundo par de parênteses.

$$= (x - 2)(2x^2 - 3)$$

Verifique o seu trabalho ao multiplicar os fatores, para garantir que você obtenha a expressão original.

$$\begin{aligned}
&= x(2x^2) + x(-3) + (-2)(2x^2) + (-2)(-3) \\
&= 2x^3 - 3x - 4x^2 + 6 \\
&= 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6
\end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Fatore o polinômio $12x^4 + 6x^3 + 14x + 7$.

Padrões Especiais de Fatoração

Em alguns casos, a fatoração de um polinômio não requer quase nenhum esforço. Isso é interessante para mim, porque, no fundo, sou um homem

muito preguiçoso, e se eu não precisasse alimentar a mim ou à minha família, trabalharia feliz em um emprego mais simples e com menos responsabilidade.

Quando falamos de fatoração, é permitido que você seja preguiçoso e aplique uma fórmula se os polinômios apresentam um dos três padrões específicos. Para detectar essas oportunidades de atalhos, mantenha os seus olhos atentos em quadrados e cubos perfeitos.

Um *quadrado perfeito* é o que você obtém ao multiplicar algo por si mesmo. Em outras palavras, você cria um quadrado perfeito ao elevar ao quadrado alguma coisa. Por exemplo, $36w^4$ é um quadrado perfeito, porque é o resultado de algo multiplicado por si mesmo: $(6w^2)(6w^2) = 36w^4$.

Um *cubo perfeito* é criado ao multiplicar alguma coisa por si mesma duas vezes (em outras palavras, o resultado de elevar algo ao cubo). Logo, $-8y^3$ é um cubo perfeito, porque $(-2y)(-2y)(-2y) = -8y^3$.

Fale a Linguagem

Um **quadrado perfeito** é criado ao multiplicar um número por ele mesmo. Um **cubo perfeito** é criado ao multiplicar um número por ele mesmo duas vezes.

Aqui estão alguns padrões de fatoração que você deve aprender a reconhecer. Memorize as fórmulas, porque tentar criá-las do nada gasta-se mais tempo.

- **A diferença de quadrados perfeitos:** A expressão $a^2 - b^2$ (um quadrado perfeito menos outro) é fatorado em $(a + b)(a - b)$. Por exemplo, o polinômio $x^2 - 16$ é uma diferença de quadrados perfeitos porque $(x)^2 = x^2$ e $(4)^2 = 16$; tanto x^2 quanto 16 são o resultado de algo elevado ao quadrado. Compare $x^2 - 16$ à fórmula $a^2 - b^2$ para ver que $x^2 = a^2$ e $16 = b^2$. Então, $x = a$ e $4 = b$. Insira esses valores de a e b nas diferenças dos padrões de fatoração de pares perfeitos.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$$

- **A diferença de cubos perfeitos:** Se dois cubos perfeitos são subtraídos, eles podem ser fatorados como o produto de um binômio e de um trinômio: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Por exemplo, o polinômio $8x^3 - 27$ é uma diferença de cubos perfeitos. Para aplicar a fórmula (e, então, fatorar), defina $8x^3 - 27 = a^3 - b^3$, onde $a = 2x$ e $b = 3$.

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$(2x)^3 - (3)^3 = (2x-3)\left[(2x)^2 + (2x)(3) + (3)^2\right]$$
$$8x^3 - 27 = (2x-3)\left(4x^2 + 6x + 9\right)$$

- **A soma de cubos perfeitos:** A soma de dois cubos é fatorada quase da mesma forma que a diferença de dois cubos – apenas alguns sinais são diferentes: $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Considere o polinômio $y^3 + 64$, a soma de cubos perfeitos $a^3 + b^3$ quando $a = y$ e $b = 4$.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(y)^3 + (4)^3 = (y + 4)\left[(y)^2 - (y)(4) + (4)^2\right]$$
$$y^3 + 64 = (y + 4)(y^2 - 4y + 16)$$

Alerta do Kelley

Não há nenhum padrão de fatoração para a soma de quadrados perfeitos, então, você não pode fatorar $a^2 + b^2$. Alunos de álgebra frequentemente o fatoram incorretamente como $(a + b)(a + b)$. Se você multiplicar $(a + b)(a + b)$, você terá $a^2 + 2ab + b^2$, e não $a^2 + b^2$.

Mantenha em mente que você pode obter um maior fator comum de um polinômio *antes* que aplique os três padrões de fatoração. Na verdade, você sempre deve procurar por um maior fator comum (e se ele existir, o fatore) *antes* que pense em qualquer outra técnica de fatoração. Dessa maneira, é certo que você encontrará a versão fatorada total de um polinômio.

Exemplo 3: Fatore os polinômios.

a. $16x^3 + 2y^3$

Solução: Isso se parece com o problema da soma de cubos perfeitos, graças à potência de 3, mas não se encaixa exatamente à fórmula. Apesar de x^3 ser um cubo perfeito, $16x^3$ não é. (Não há nenhum número racional que seja igual a 16 quando multiplicado por si mesmo duas vezes.) O mesmo é válido para $2y^3$.

No entanto, a esperança não está perdida. Os termos têm um maior fator comum de 2, então, fatore-o.

$$2(8x^3 + y^3)$$

Alerta do Kelley

Sempre assuma que é esperado que você fatore um polinômio completamente. Em outras palavras, nenhum dos fatores finais deve ser fatorável.

Por enquanto, ignore o 2 que está fora dos parênteses; a quantidade dentro deles se encaixa na fórmula da soma de cubos perfeitos se $a = 2x$ e $b = y$. Reescreva $8x^3 + y^3$ na forma fatorada, deixando o MDC exatamente onde ele está, na frente.

$$2(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$$

b. $x^4 - 16$

Solução: Isso é uma diferença de quadrados perfeitos, e se encaixa na fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se $a = x^2$ e $b = 4$.

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

Se você fosse terminar aqui, tecnicamente, teria o problema errado, porque não está fatorado *completamente*. Um dos fatores, $x^2 - 4$, também é um quadrado perfeito e deve ser fatorado: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

$$(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Fatore o polinômio $5x^2 - 125$.

Fatorando Trinômios Usando Seus Coeficientes

De todas as expressões que você irá fatorar, os trinômios quadráticos (polinômios com três termos elevados ao expoente 2) são provavelmente os mais comuns. Portanto, o resto deste capítulo se concentrará neles. Esta seção lidará com trinômios que possuem um coeficiente principal 1. A seção final do capítulo, "Fatorando com o Método da Bomba", é dedicada a polinômios com diferentes coeficientes principais.

Um trinômio quadrático com um coeficiente principal 1 se parece com $x^2 + ax + b$, onde a e b são inteiros. O seu objetivo é fatorar esse trinômio em dois binômios que se pareçam com isso:

$$(x + \boxed{?})(x + \boxed{?})$$

Basicamente, tudo que você precisa fazer é deduzir quais números vão nessas caixas $\boxed{?}$. Aqui está o truque: se o trinômio $x^2 + ax + b$ é fatorável, então, dois números cuja soma é a (o coeficiente do termo x) e cujo produto é b (a constante) existirão. Quando você souber quais números são a e b, insira cada um em sua própria caixa (não importa em qual). E, então, você fatorou o trinômio.

Ponto Crítico

Quando você está tentando descobrir o que vai nas caixas $\boxed{?}$ para fatorar $x^2 + ax + b$, preste atenção especial nos sinais de a e b. Se b for positivo, então os números misteriosos são ambos positivos ou negativos. Se b é negativo, então um dos números misteriosos deve ser positivo – e o outro tem que ser negativo.

Exemplo 4: Fatore os polinômios.

a. $x^2 + 7x + 12$

Solução: Pergunte-se a si mesmo:"Quais são os dois números que adicionados dão 7 e multiplicados são iguais a 12?". Como 12 é positivo, os números misteriosos são os dois positivos ou ambos negativos. No entanto, se a soma dos números misteriosos é positiva, então os números

também são positivos (não há como adicionar dois números negativos e ter uma soma positiva).

Se a resposta não vier logo à sua cabeça, defina um número misterioso como 1. Nesse caso, os números somados dariam 7, e então, isso significa que o outro número misterioso seria 6. Porém, $6 \cdot 1 \neq 12$; então, mude os números de 1 e 6 para 2 e 5; esses números também têm a soma igual a 7. Infelizmente, $5 \cdot 2 = 10$, o que também não é igual a 12, mas pelo menos é mais perto de 12 do que $1 \cdot 6$.

Continue aumentando os seus palpites. Em outras palavras, agora é a vez de tentar 3 e 4. Isso parece promissor: $3 + 4 = 7$ e $4 \cdot 3 = 12$. Eureka! Insira esses números em $(x + \boxed{?})(x + \boxed{?})$ e você terminou: $(x + 3)(x + 4)$. A multiplicação é comutativa, então a resposta $(x + 4)(x + 3)$ é igualmente correta.

b. $w^2 - 3w - 54$

Solução: Apesar de esse trinômio ter w ao invés de x, o processo é o mesmo. A constante -54 é negativa. Então, isso significa que um dos números misteriosos é positivo e o outro é negativo. Como eles dão um número negativo (-3) quando somados, o número misterioso negativo é maior que o número positivo.

Se você não sabe por onde começar, use 1 como um número misterioso – como no Exemplo 4(a) – e vá incrementando 1 até você acertar: $-4 + 1$, $-5 + 2$, $-6 + 3$, etc. Você eventualmente irá chegar nos números -9 e 6 , que possuem a soma e o produto corretos ($-9 + 6 = -3$ e $-9(6) = -54$). Então, a forma fatorada do polinômio é $(x - 9)(x + 6)$.

Ponto Crítico

Outra maneira de achar os números misteriosos no Exemplo 4(b) é começar pela constante, e não no coeficiente x. Ao invés de tentar pares de números que têm a soma -3, tente pares de números cujo produto é -54.

Você Tem Problemas

Problema 4: Fatore o polinômio $2x^3 - 24x^2 + 64x$.

Fatorando com o Método da Bomba

Quando o coeficiente principal de um trinômio quadrático não é 1, é hora de usar a artilharia pesada e colocar a técnica da bomba para fatorar. Para ser honesto, eu sou o único que usa esse nome estranhamente explosivo para descrever o processo – aprendi o método da bomba muitas luas atrás sob o nome sem inspiração de "fatoração por decomposição", e decidi renomeá-lo.

Muitos professores nem sabem que essa técnica existe e, ao invés disso, aconselham você a "brincar" com os números até conseguir chegar a um par de binômios que funcione. Isso é um mau conselho, especialmente quando você está diante de problemas difíceis de fatoração. Afinal de contas, quase tudo que você aprende em álgebra tem passos bastante específicos e rígidos, que você tem que seguir *exatamente* na mesma ordem, sob pena de os fantasmas de matemáticos já mortos levantarem de seus túmulos, chutarem o seu joelho e escreverem na sua testa.

Ponto Crítico

Polinômios não fatoráveis, como números não fatoráveis, são descritos como primos.

Aqui estão os passos que acendem o fusível na técnica da bomba para a fatoração do polinômio $ax^2 + bx + c$:

1. **Fatore o MDC, se existir um.** Esse sempre deve ser o seu primeiro passo em um problema de fatoração.

2. **Ache os dois números misteriosos.** Eles são parecidos com os números que você buscou ao fatorar trinômios simples. Você ainda quer que a soma seja o coeficiente de x (b), mas, agora, você quer que o produto seja igual a $a \cdot c$, que é o coeficiente principal vezes a constante.

3. **Substitua o coeficiente *x*.** Reescreva o polinômio, mas, onde b costumava ficar, escreva a soma dos dois números misteriosos em parênteses. Esse grupinho poderoso de parênteses irá explodir, dividindo o trinômio em dois binômios – é por isso que eu o chamo de método da bomba.

4. **Distribua *x* nos parênteses.** Restará ainda um x próximo aos parênteses. Multiplique cada número misterioso por x e tire os parênteses.

5. **Fatore por agrupamento.** Como descrito anteriormente no capítulo, fatore por agrupamento para mudar o polinômio de quatro termos em um produto de binômios lineares.

O método da bomba requer prática. Faça os seus próprios trinômios para fatoração ao multiplicar binômios lineares simples; e, depois, tente fatorar o produto de volta nesses binômios.

Exemplo 5: Fatore o polinômio $6x^2 - x - 12$.

Solução: Esse polinômio não possui nenhum MDC, então, pule para o cálculo dos números misteriosos. A soma deles deve ser igual a –1 e o produto igual a $6(-12) = -72$. Os únicos números que se encaixam nessas exigências são o –9 e o 8. Substitua o coeficiente x - 1 ao adicionar esses números nos parênteses.

$$6x^2 + (-9 + 8)x - 12$$

Distribua o x à direita dos parênteses.

$$6x^2 - 9x + 8x - 12$$

Agora, para finalizar, você pode fatorar por agrupamento.

$$\begin{aligned}&(6x^2 - 9x) + (8x - 12)\\&= 3x(2x - 3) + 4(2x - 3)\\&= (2x - 3)(3x + 4)\end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Fatore o polinômio $4x^2 + 23x - 6$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Comece cada problema de fatoração procurando um maior fator comum.
- Diferenças de quadrados perfeitos podem ser fatoradas, assim como somas e diferenças de cubos perfeitos. Porém, não há nenhum padrão de fatoração para somas de quadrados perfeitos.
- Ao fatorar um trinômio quadrático com um coeficiente principal de 1, encontre dois números que adicionados sejam o coeficiente x do trinômio – e multiplique-os para descobrir a constante.
- No método da bomba para a fatoração de trinômios do tipo $ax^2 + bx + c$, você substitui b pela soma de dois números misteriosos que são iguais a b quando adicionado e igual a $a \cdot c$ quando multiplicados.

Capítulo 12

Lutando com os Radicais

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Simplificar expressões com radicais
- Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir expressões com radicais
- Resolver equações simples que contêm radicais
- Lidar com números imaginários

Expoentes não são mais novidades. Você já elevou as coisas ao quadrado, ao cubo, ocasionalmente elevou as coisas a uma potência negativa e até entrou numa briga com uma variável elevada à quinta potência uma vez, do lado de fora de uma boate sombria, na periferia da cidade. (Se o coeficiente dela não estivesse lá, quem sabe o que teria acontecido?)

Vamos ser honestos, os expoentes têm andado por aí se exibindo. Eles estão no topo da cadeia alimentar, sem inimigos naturais. Claro que a adição é ótima, mas ela tem que ficar de olho em sua arqui-inimiga, a subtração, e a multiplicação nunca mais a foi a mesma, depois que a divisão apareceu e começou a falar com o seu namorado. Finalmente, as coisas mudaram, e os expoentes estão prestes a serem colocados em seus devidos lugares; este capítulo lida com radicais, pequenos símbolos que mantêm as potências exponenciais sob controle e que (coincidentemente) se parecem com pequenos sinais de verificação.

Apresentando o Sinal Radical

Uma *expressão com radical* se parece com $\sqrt[a]{b}$ (leia-se "raiz *a*-ésima de *b*"), e se consiste em três partes:

- *Símbolo do radical*: o símbolo que se parece com um sinal de verificação, com uma reta horizontal alongada até o seu final.
- *Índice*: o número pequeno dentro da parte do sinal de verificação do radical; na expressão $\sqrt[a]{b}$, *a* é o índice.
- *Radicando*: a quantia escrita dentro do símbolo do radical, abaixo do teto horizontal; *b* é o radicando da expressão $\sqrt[a]{b}$.

Fale a Linguagem

A **expressão radical** $\sqrt[a]{b}$ tem três grandes características: o **símbolo do radical** (que se parece com um sinal de verificação), o **índice** (o número pequeno dentro do "v" do sinal de radical) e o **radicando**, que fica embaixo da barra horizontal do radical.

A maioria dos radicais com que você irá lidar terá índice 2, e são chamados de raízes quadradas. Quando nenhum índice é escrito explicitamente em uma expressão radical (como em $\sqrt{13}$), você automaticamente assume que o índice é 2.

Simplificando Expressões com Radicais

Pense no símbolo do radical como uma prisão e as peças do radicando como os presos. Nem todos os prisioneiros estão condenados à prisão perpétua, presos dentro do casarão úmido e fedido do radical – há chances de uma condicional. No entanto, para serem soltos do sinal do radical, você deve cumprir com as exigências da condicional.

Fale a Linguagem

Radicais com índice 2 são chamados de **raízes quadradas**, apesar de o índice 2 raramente ser escrito de forma explícita ($\sqrt{5x}$, e não $\sqrt[2]{5x}$). Radicais com índice 3 são chamados de raízes cúbicas. Enquanto um índice pode ser qualquer número natural, apenas dois tipos de radicais têm nomes especiais.

Especificamente, um radical só irá libertar coisas elevadas a uma potência que é correspondente ao seu índice. Então, *raízes quadradas* só serão soltas do radicando quando elevadas à segunda potência, e um radical com um índice 5 só irá soltar coisas elevadas à quinta potência. Quando você simplifica radicais, condiciona os fatores que cumprem as exigências, e deixa o resto dentro da raiz.

Exemplo 1: Simplifique as expressões com radicais.

a. $\sqrt[3]{16x^4y^6}$

Solução: Comece fatorando o coeficiente – escreva-o como um produto de números menores. Como o índice do radical é 3, você quer que os fatores sejam potências de 3 sempre que possível. Logo, ao invés de escrever 16 como $16 \cdot 1$ ou $4 \cdot 4$, escreva como $8 \cdot 2$ ou $2^3 \cdot 2$, onde um dos fatores é um cubo perfeito ($8 = 2^3$).

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot x^4y^6}$$

Ponto Crítico

Para facilitar a simplificação de radicais, memorize os 15 primeiros quadrados perfeitos (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225) e os 5 primeiros cubos perfeitos (1, 8, 27, 64, 125).

Agora, preste atenção às variáveis. Você pode reescrever x^4 como $x^3 \cdot x$ (porque $x^3 \cdot x = x^{3+1} = x^4$), então, ela contém um expoente 3. Felizmente, y^6 é um cubo perfeito ($y^2 \cdot y^2 \cdot y^2 = y^6$); então, escreva-o usando toda a importante potência de 3: $(y^2)^3$.

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x \cdot (y^2)^3}$$

Ponto Crítico

Por que você reescreve y^6 como $(y^2)^3$ no Exemplo 1(a)? Você está tentando fazer grupos de três coisas, para que eles possam ser liberados do radical. Ajuda pensar em $(y^2)^3$ como um grupo de três y^2 multiplicados, e $(y^2)^3 = y^6$, graças à regra exponencial do Capítulo 3, que diz que $(x^a)^b = x^{ab}$.

De todos os fatores no radicando, apenas 2^3, x^3 e $(y^2)^3$ são elevados à terceira potência. Coloque-os na frente do radical, retirando a terceira potência assim que eles saírem da prisão, deixando os fatores 2 e x dentro.

$$(2xy^2)\sqrt[3]{2x}$$

b. $\sqrt{18x^2y^3}$

Solução: Não há nenhum índice escrito nesse radical, o que significa que ele é uma raiz quadrada e o índice é entendido como 2. Isso significa que você quer que o radicando seja o máximo possível elevado à segunda potência. O coeficiente 18 tem apenas um fator que é um quadrado perfeito (9), então, reescreva 18 como o produto $2 \cdot 9$ (ou $2 \cdot 3^2$). O termo x^2

já possui um expoente 2, mas você deve reescrever o termo y^3 como $y^2 \cdot y$, para identificar y^2 como um candidato para a condicional.

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y}$$

Coloque tudo com um expoente 2 fora do radical (e retire as potências conforme fizer isso), deixando o que sobrou como o novo radicando.

$$3|xy|\sqrt{2y}$$

Você deve estar se perguntando de onde saíram esses sinais de valor absoluto. Eu meio que os joguei em você, e peço desculpas. Há uma regra em álgebra que diz que se você tiver a expressão $\sqrt[n]{x^n}$ (o grau do expoente é correspondente ao índice do radicando), e n for par, então, o resultado simplificado é $|x|$. Aqui está o porquê: você sempre quer que uma raiz de potência par tenha uma resposta positiva, e esses valores absolutos garantem que não importa o valor da variável, a resposta será positiva.

Alerta do Kelley

Se você tem uma variável em um radicando que é elevada à mesma potência par do índice, você deve cercar as variáveis em condicional com símbolos de valor absoluto.

Você está liberando tanto x^2 quanto y^2 dessa raiz quadrada, e esses expoentes são correspondentes com o índice do radical. E então, você tem que jogá-los dentro dos sinais de valor absoluto depois que eles estiverem em condicional.

Você Tem Problemas

Problema 1: Simplifique a expressão radical $\sqrt{300x^6y^3}$.

Liberando Potências Racionais

Radicais podem ser escritos sem um sinal de radical através de expoentes fracionários. A expressão $a^{1/2}$ (leia-se "a à meia potência") é equivalente à $\sqrt{a}$, e $b^{1/3}$ significa a mesma coisa que $\sqrt[3]{b}$. O expoente fracionário nem sempre tem um numerador 1 – você pode usar outros números para criar expressões com radicais mais complicadas.

Veja como expoentes racionais funcionam: a expressão $x^{a/b}$ é igual tanto a $\sqrt[b]{x^a}$ quanto a $(\sqrt[b]{x})^a$. Apesar de elas parecerem diferentes, ambas significam exatamente a mesma coisa; então, não importa qual você escolher. Porém, você geralmente achará a primeira mais útil na simplificação de variáveis; e a segunda muito mais prática para números.

Exemplo 2: Simplifique as expressões.

a. $64^{2/3}$

Solução: Reescreva $64^{2/3}$ como $\left(\sqrt[3]{64}\right)^2$. A ordem das operações diz que primeiro os parênteses devem ser simplificados, e, já que o radical possui um índice 3, você está procurando por cubos perfeitos. Felizmente, $64 = 4^3$: $\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^2$. Quando 4 é elevado à terceira potência dentro de um radical de índice 3, ele consegue a condicional: $\left(\sqrt[3]{4^3}\right)^2 = 4^2 = 16$.

Logo, $64^{2/3} = 16$.

Se você tivesse reescrito $64^{2/3}$ como $\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{4{,}096}$, a resposta ainda teria sido 16. Só é mais difícil de identificar que 4.096 é um cubo perfeito ($16^3 = 4096$).

b. $4^{5/2}$

Solução: Reescreva a expressão como $\left(\sqrt{4}\right)^5$. Felizmente, 4 é um quadrado perfeito: $2^2 = 4$.

$$\left(\sqrt{4}\right)^5 = \left(\sqrt{2^2}\right)^5 = 2^5 = 32$$

Ponto Crítico

O denominador de uma potência fracional é o índice do radical equivalente; e o numerador é a potência, do radicando ou do radical inteiro.

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique a expressão $25^{3/2}$.

Operações Com Radicais

A expressão "operações com radicais" não significa "procedimentos médicos extremos", como ter o seu braço removido e substituído por uma lontra, ou talvez ter o seu primo Rafael cirurgicamente colado ao seu lado esquerdo, para que vocês possam ser os primeiros gêmeos siameses do mundo feitos pelo homem. Ao invés disso, ela se refere a conceitos matemáticos, como adição, subtração, multiplicação e divisão de radicais.

Há regras específicas que você deve seguir quando expressões radicais estão presentes, assim como há regras especiais que coordenam expressões polinomiais. Mais uma vez, você achará a multiplicação e a divisão de radicais muito mais fácil do que a adição e subtração deles.

Adição e Subtração

O Capítulo 10 insistiu que você podia adicionar ou subtrair apenas termos iguais – termos com exatamente as mesmas variáveis. Radicais funcionam de forma semelhante. Para adicioná-los ou subtraí-los, eles devem ser *radicais iguais*, que contêm exatamente o mesmo radicando e o mesmo índice.

Se você tiver que adicionar ou subtrair radicais que contêm radicandos diferentes, não entre em pânico. Tente simplificar os radicais – isso geralmente costuma funcionar.

Exemplo 3: Simplifique a expressão $3\sqrt{2xy}-2\sqrt{50xy}$.

Solução: Repare que o segundo radical pode ser simplificado, porque $50 = 25 \cdot 2$ e 25 é um quadrado perfeito.

$$2\sqrt{50xy}=2\sqrt{25\cdot 2\cdot xy}=2\sqrt{5^2\cdot 2\cdot xy}=2\cdot 5\sqrt{2xy}=10\sqrt{2xy}$$

O problema original agora se parece com isso:

$$3\sqrt{2xy}-10\sqrt{2xy}$$

Fale a Linguagem

Radicais iguais possuem radicandos e índices correspondentes, como $6\sqrt[5]{2x^2y}$ e $-9\sqrt[5]{2x^2y}$.

Sem nem mesmo tentar, você criou um par de radicais iguais – os radicandos e os índices são correspondentes. Como eles são radicais iguais, você pode somar os seus coeficientes ($3 - 10 = -7$) e manter a expressão radical em comum $\sqrt{2xy}$. A resposta final é $-7\sqrt{2xy}$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Simplifique a expressão $\sqrt[3]{8x^4}+4x\sqrt[3]{x}$.

Multiplicação

Se dois radicais com o mesmo índice são multiplicados, o resultado é apenas o produto dos radicando embaixo de um único radical com um índice correspondente. Ou seja, se você está multiplicando radicais com índices correspondentes, apenas multiplique as coisas dentro dos sinais de radical e escreva o resultado embaixo de um sinal de radical com o mesmo índice que os radicais originais tinham.

$$\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}\right)=\sqrt{xy} \qquad \left(\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{w^2}\right)=\sqrt[3]{7w^2}$$

Exemplo 4: Simplifique a expressão $\left(\sqrt[3]{9x^4y^5}\right)^2$.

Solução: Elevar um radical ao quadrado significa multiplicá-lo a si mesmo.

$$\left(\sqrt[3]{9x^4y^5}\right)\left(\sqrt[3]{9x^4y^5}\right)$$

Multiplique os radicandos e escreva o produto embaixo de um sinal de radical com o mesmo índice (3).

$$\sqrt[3]{9\cdot 9\cdot x^4\cdot x^4\cdot y^5\cdot y^5}=\sqrt[3]{81x^8y^{10}}$$

Simplifique o radical

$$\sqrt[3]{3^3\cdot 3\cdot\left(x^2\right)^3\cdot x^2\cdot\left(y^3\right)^3\cdot y}=3x^2y^3\sqrt[3]{3x^2y}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Simplifique o produto $\left(\sqrt{12x^2y}\right)\left(\sqrt{3xy}\right)$.

Divisão

O quociente entre dois radicais de mesmo índice pode ser reescrito como o radical do quociente dos radicandos. Em outras palavras, a expressão $\sqrt{x}\div\sqrt{y}$ é equivalente a $\sqrt{\frac{x}{y}}$. Porém, há uma nova preocupação que surge ao lidar com a divisão de radicais – a presença de um radical no denominador da sua resposta final.

Por muito tempo, é considerado de mau gosto deixar um radical no denominador de uma resposta final. Afinal de contas, números irracionais são decimais compridos e feios. Não é como se fosse esperado que você dividisse esse decimal no numerador ou algo do tipo, mas a forma final desse problema de divisão culminou em décadas de pressão para eliminar quaisquer radicais denominadores, em um processo chamado de *racionalização do denominador*. É um passo final e simples, que alguns professores exigem e outros (como eu) não. Certifique-se de perguntar ao seu professor se é esperado que você racionalize os denominadores nas soluções.

Fale a Linguagem

O processo de remover radicais do denominador é chamado de **racionalização do denominador**.

Exemplo 5: Simplifique a expressão $\sqrt{12x^7y} \div \sqrt{8xy^3}$ e racionalize o denominador.

Solução: Escreva o quociente como uma fração sob o sinal de radical.

$$\sqrt{\frac{12x^7y}{8xy^3}}$$

Simplifique a fração.

$$\sqrt{\frac{12}{8}x^{7-1}y^{1-3}} = \sqrt{\frac{3}{2}x^6y^{-2}} = \sqrt{\frac{3x^6}{2y^2}}$$

Ponto Crítico

É permitido que você multiplique uma fração por qualquer coisa dividida por si mesma, porque isso é tecnicamente a mesma coisa que multiplicar por 1 (qualquer coisa dividida por ela mesma é igual a 1).

Escreva o numerador e o denominador como radicais separados e os simplifique.

$$\frac{\sqrt{3x^6}}{\sqrt{2y^2}} = \frac{\sqrt{3(x^3)^2}}{\sqrt{2(y)^2}} = \frac{x^3\sqrt{3}}{|y|\sqrt{2}}$$

O denominador da fração contém o radical $\sqrt{2}$; para eliminá-lo, multiplique tanto o numerador quanto o denominador por $\sqrt{2}$.

$$\frac{x^3\sqrt{3}}{|y|\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x^3\sqrt{6}}{y\sqrt{4}}$$

O radical no denominador agora contém um quadrado perfeito – simplifique-o para racionalizar o denominador.

$$\frac{x^3\sqrt{6}}{|y|\sqrt{4}} = \frac{x^3\sqrt{6}}{2|y|}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Simplifique a expressão $\sqrt{2x^2y^3} \div \sqrt{18x^3y^2}$ e racionalize o quociente.

Resolvendo Equações com Radicais

Você já leu *Alice no País das Maravilhas*? O livro teve uma sequência (um pouco menos popular) chamada *Através do Espelho*, na qual Alice passa através de um espelho para um mundo que é um estranho reflexo do seu. Alguns físicos ligaram a relação entre esses mundos à relação entre matéria e antimatéria.

Sem ser muito nerd ou discutir os sistemas de propulsão de *Jornada nas Estrelas* (que são teoreticamente movidos por motores matéria/antimatéria – tarde demais, eu acabei falando!), vou resumir e dizer que você nunca deve ter a matéria

e a antimatéria no mesmo evento social, porque se elas entrarem em contato haverá uma explosão cataclísmica. Elas são a antítese exata uma da outra, tanto que, quando se tocam, elas se cancelam da maneira mais permanente possível: detonação. Uma relação um pouco menos violenta, mas parecida, existe entre mim e a garota que eu namorei no colégio, mas isso não vem ao caso agora.

A mesma relação existe entre radicais com índice *n* e expressões exponenciais com a potência *n*. Se elas se encontrarem, falarão "Não fui eu quem mudou, foi você" (na verdade, isso se parece mais com a minha ex-namorada) e prontamente explodirão, deixando para trás apenas o conteúdo do radicando, uma nuvem de fumaça e algumas cartas de amor embaraçosas que você não se lembra de ter escrito.

Essa propriedade explosiva pode ser usada para resolver equações que contêm radicais, ou até para medir a potência das pirotecnias de shows de bandas de metal como Limozeen e Taranchula. Por falta de espaço, me concentrarei na primeira aplicação.

Exemplo 6: Resolva a equação $\sqrt[3]{2x-1}+3=6$.

Solução: A variável *x* está presa dentro de um sinal de radical; você precisa libertá-la com alguns explosivos especialmente desenvolvidos. Antes que você defina a carga, tire tudo do caminho, menos o radical – isole-o ao subtrair 3 dos dois lados da equação.

Fale a Linguagem

Os nomes da banda de metal são um tributo à Strong Bad, um personagem que vive no site www.homestarrunner.com. Se você não visitou esse site ainda, visite-o, e diga a Marzipan que eu falei oi.

$$\sqrt[3]{2x-1}=3$$

Para destruir esse radical com índice 3, eleve-o à terceira potência (se ele tivesse um índice 5, você elevaria os dois lados à quinta potência – combine o expoente ao índice do radical condenado). Para manter a equação equilibrada, você deve elevar o lado direito à terceira potência também.

$$\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=3^3$$

Tudo o que sobra do lado esquerdo da equação é o conteúdo latente do radicando. A equação resultante é muito simples de ser resolvida.

$$\begin{aligned}2x-1&=27\\2x&=28\\x&=14\end{aligned}$$

Você pode verificar a sua resposta substituindo *x* por 14 no problema original.

$$\sqrt[3]{2x-1}+3=6$$
$$\sqrt[3]{2(14)-1}=3$$
$$\sqrt[3]{27}=3$$
$$3=3$$

Você acabará com a afirmação (3 = 3), que é verdadeira, o que significa que você obteve a resposta certa.

Você Tem Problemas

Problema 6: Resolva a equação $2\sqrt{x-3}=8$.

Quando as Coisas Ficam Complexas

Até agora, neste capítulo, a maioria dos radicandos tem sido positiva. Eles não conseguem evitar – eles são simplesmente animados, e não há nada de errado nisso. Entretanto, você precisa saber como lidar quando bate a negatividade.

Às vezes, um negativo não é problema. Por exemplo, quando o índice de um radical é ímpar, um radicando negativo é completamente válido; $\sqrt[3]{-8x^3}$ é simplificado em $-2x$, porque $(-2x)(-2x)(-2x) = -8x^3$. Uma coisa negativa multiplicada por ela mesma um número par de vezes também será negativa. Porém, se um negativo se infiltra dentro de um radical com um índice par, aí há problemas.

Se $\sqrt{16}$ é fácil de ser simplificado $\left(\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4\right)$, a expressão $\sqrt{-16}$ não é. Você não pode elevar um número ao quadrado e acabar com algo negativo. Um produto de dois números é negativo apenas quando os números têm sinais diferentes, e não há como um número ter um sinal diferente do seu!

Tem Algo no Seu i

Uma coisa boa em matemáticos é que eles são bons em inventar coisas que transformam coisas impossíveis em possíveis. Uma das invenções mais úteis é o *i*, uma letra que é a solução ao radicando negativo problemático. A letra *i* é a abreviação de "número imaginário" e tem como valor $i=\sqrt{-1}$.

Um número que contém *i* (como 2*i* ou –5*i*) é chamado de *número imaginário*, e números da forma $a + bi$ (onde *a* e *b* são números reais) são *números complexos*.

Basicamente, um número complexo é composto por uma parte imaginária, *bi*, adicionado ou subtraído de uma parte real, *a*. Por exemplo, no número complexo 4 – 7*i*, a parte real é 4 e a parte imaginária é – 7*i*.

Todo número complexo $a + bi$ tem um *conjugado* igual a $a - bi$. A única diferença entre um número complexo e o seu conjugado é o sinal da parte imaginária. Isso significa que o conjugado de 4 – 7*i* deve ser 4 + 7*i*.

Como Eles Fazem Isso?

Todos os números imaginários também são números complexos. Por exemplo, 3*i* tem a forma $a + bi$ (que o faz complexo), onde $a = 0$ e $b = 3$. Adicionalmente, todos os números reais também são complexos. Pegue o número real 12; ele tem a forma complexa $a + bi$ se $a = 12$ e $b = 0$.

Fale a Linguagem

Um **número imaginário**, *bi*, é o produto de um número real *b* e o valor imaginário $i = \sqrt{-1}$. Um *número complexo* tem a forma $a + bi$, onde *a* e *b* são números reais. Todo número complexo tem um **conjugado**, $a - bi$, que é exatamente correspondente ao número complexo, exceto pelo sinal na sua parte imaginária *bi*.

Aqui está algo para você pensar: se $i = \sqrt{-1}$, então $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ (se um radical é elevado a um expoente que corresponde ao seu índice, ambos desaparecem, deixando para trás apenas o que está embaixo do radical – neste caso, –1). É extremamente estranho um número ao quadrado produzir um número negativo, mas esse é o papel peculiar e amável dos números imaginários.

Exemplo 7: Simplifique as expressões

a. $\sqrt{-40}$

Solução: Reescreva $\sqrt{-40}$ como $\sqrt{-1 \cdot 4 \cdot 10}$. Remova o quadrado perfeito ($4 = 2^2$) do radical e reescreva $\sqrt{-1}$ como $\sqrt{-1 \cdot 2^2 \cdot 10} = 2i\sqrt{10}$.

b. i^5

Solução: Reescreva i^5 usando tantos fatores i^2 quanto possíveis.

$$i^5 = i^{2+2+1} = i^2 \cdot i^2 \cdot i$$

Lembre-se de que $i^2 = -1$.

$$i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1)(-1)\,i = i$$

Logo, $i^5 = i$.

Você Tem Problemas

Problema 7: Simplifique a expressão $\sqrt{-36} + i^3$.

Simplificando Expressões Complexas

Adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos são parecidas aos métodos usados no Capítulo 10 para polinômios, exceto ao se tratar da divisão. Veja um breve resumo descrevendo como as quatro operações mais importantes funcionam com números complexos:

- **Adição:** Números imaginários possuem a mesma variável, i, então, trate-os como termos; adicione as partes reais e as partes imaginárias separadamente.

$$(3 - 4i) + (2 + 9i) = (3 + 2) + (-4i + 9i) = 5 + 5i$$

- **Subtração:** Depois de distribuir o sinal negativo, tudo o que resta é um simples problema de adição.

$$(3 - 4i) - (2 + 9i) = (3 - 4i) + (-2 - 9i) = (3 - 2) + (-4i - 9i) = 1 - 13i$$

- **Multiplicação:** Como em qualquer produto de binômios, você distribui cada termo do primeiro número complexo para cada termo do segundo número complexo.

$$\begin{aligned}(3-4i)(2+9i) &= 3(2)+3(9i)+(-4i)(2)+(-4i)(9i)\\ &= 6+27i-8i-36i^2\end{aligned}$$

Substitua i^2 por -1 e combine os termos iguais.

$$\begin{aligned}&= 6+(27i-8i)-36(-1)\\ &= 42+19i\end{aligned}$$

- **Divisão:** Boas notícias! Você não precisa usar a divisão longa ou sintética para calcular o quociente dos números complexos. Para dividir $1 - i$ por $2 + 7i$, comece escrevendo o quociente como uma fração.

$$\frac{1-i}{2+7i}$$

Multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\frac{1-i}{2+7i}\left(\frac{2-7i}{2-7i}\right)=\frac{(1-i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)}$$

Você criou fatores no denominador que, quando multiplicados, tornam-se uma diferença de quadrados perfeitos. Todos os termos imaginários serão eliminados do denominador – e é por isso que você multiplicou primeiro pelo conjugado.

Ponto Crítico

Nenhum número complexo simplificado irá conter i^2. Sempre substitua i^2 por -1.

$$\frac{(1-i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)}=\frac{2-7i-2i+7i^2}{4-14i+14i-49i^2}=\frac{2-9i+7(-1)}{4-49(-1)}=\frac{-5-9i}{53}$$

Números complexos geralmente são escritos na forma $a + bi$, então, divida os dois termos do numerador pelo denominador.

$$=-\frac{5}{53}-\frac{9i}{53}$$

Você Tem Problemas

Problema 8: Dados os números complexos $c = 3 - 4i$ e $d = 8 + i$, calcule o seguinte:

a. $c+d$

b. $c-d$

c. $c \cdot d$

d. $c \div d$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Para simplificar radicais, procure, dentro do radicando, por fatores com expoentes correspondentes ao índice.
- Você pode adicionar ou subtrair apenas radicais iguais.
- A expressão $x^{a/b}$ pode ser reescrita como $\sqrt[b]{x^a}$ ou $\left(\sqrt[b]{x}\right)^a$.
- O número complexo $a + bi$ é a soma de um número real a e de um número imaginário bi.
- O conjugado de um número complexo $a + bi$ é $a - bi$.

Capítulo 13

Equações e Inequações Quadráticas

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Achar soluções pela fatoração
- Completar o quadrado
- Aplicar a fórmula quadrática
- Resolver e desenhar inequações quadráticas simples

Quando ensinei matemática em uma escola pública, fui também o professor de educação física. O fato de um nerd da matemática estar distribuindo conselhos atléticos pode ser chocante para você e, honestamente, deve ser mesmo. Eu nunca fui e nunca serei lembrado pelos meus reflexos ágeis e habilidosos. Na verdade, fui expulso do programa de educação física quando tinha sete anos, porque eles pensaram que eu iria acabar ficando paraplégico. Como se pode ver, eu era o oposto exato de um gato. Enquanto a maioria dos gatos pode manter o equilíbrio durante uma queda e cair em pé, eu sempre acabava caindo de cabeça.

Apesar disso, a administração da escola achou apropriado eu ser o professor de educação física e, imediatamente, me passaram a tarefa de treinar os alunos para uma corrida com obstáculos. (Eu tentei pular um obstáculo apenas uma vez como professor, e acho que acabei desmaiando fazendo isso, pois, quando recuperei a consciência, o meu rosto estava grudado na pista. Interessantemente, meus pés ainda estavam presos no obstáculo.) Apesar de não ter sido um dos professores mais proficientes do mundo, aprendi uma coisa – sempre comece treinando os corredores com os obstáculos na menor dificuldade possível. Não tem sentindo novos atletas começarem com os obstáculos em uma altura intimidadora logo de cara. Você começa de forma fácil e, depois, lentamente, começa a aumentar a dificuldade ao longo do caminho.

Os capítulos anteriores cobriram praticamente tudo o que você sempre quis saber sobre equações lineares (e um monte de coisas que, tenho certeza, você poderia viver uma vida longa e feliz sem saber), então, é hora de subirmos um pouco os obstáculos e jogar alguns polinômios de segundo grau. Resolver equações lineares e quadráticas exige técnicas completamente diferentes, mas a boa notícia é que você tem três métodos diferentes para escolher. Até o final do capítulo, você irá pular como uma gazela sobre o obstáculo novo e mais alto, e eu estarei bastante orgulhoso de você, apesar de estar aqui embaixo, no chão, inconsciente.

Resolvendo Quadráticas por Fatoração

Se você pode transformar uma equação em um polinômio quadrático fatorável, ela fica bastante simples de ser resolvida. Apesar de esta técnica não funcionar com todas as equações quadráticas, quando funciona, é de longe a maneira mais rápida e simples de se chegar a uma resposta. Então, a não ser que um problema peça especificamente para usar outra técnica, você sempre deve tentar esta primeiro. Se você obter um polinômio primo (e não fatorável), você sempre pode mudar para uma das outras técnicas, tanto completando o quadrado como usando a fórmula quadrática (ou de Bhaskara), que serão abordadas mais tarde, neste capítulo.

Para resolver uma equação quadrática pela fatoração, siga esses passos:

1. **Defina a equação como igual a 0.** Mova *todos* os termos para o lado esquerdo da equação ao adicioná-los ou subtraí-los, como apropriado, deixando apenas o 0 no lado direito da equação.

2. **Fatore o polinômio completamente.** Use as técnicas do Capítulo 11; lembre-se de fatorar primeiro o maior fator comum.

3. **Defina cada fator como igual a 0.** Isso criará pequenas equações cujos lados esquerdos são os fatores e os lados direitos são 0. Você deve separar essas equações com a palavra “ou”.

Como Eles Fazem Isso?

Se você tem a equação $(x - a)(x - b) = 0$, o Passo 3 diz para você transformá-la nas equações gêmeas:

$$x - a = 0 \qquad \text{ou} \qquad x - b = 0$$

Você está se perguntando por que isso é permitido? Isso é possível graças a algo chamado de **propriedade do produto-zero**. Pense desta forma: se duas coisas são multiplicadas – neste caso, as quantidades $(x - a)$ e $(x - b)$ – e o resultado é 0, então, pelo menos uma dessas quantidades deve ser igual a 0! Não há como multiplicar duas ou mais e obter 0, a não ser que pelo menos uma destas coisas seja igual a 0.

4. **Resolva as equações menores e verifique a sua resposta.** Cada solução das equações pequenas é também uma solução da equação original. Entretanto, certifique-se de que elas funcionam. Você deve inseri-las de volta na equação original e verificar se as afirmações são verdadeiras.

A parte mais difícil dessa técnica é a fatoração. Mas, como isso não é um conceito novo, resolver equações quadráticas dessa maneira é bastante simples e direto.

Exemplo 1: Resolva as equações e dê todas as respostas possíveis.

a. $x^2 - 6x + 9 = 0$

Solução: Essa equação já está definida como igual a 0, então, comece fatorando o lado esquerdo.

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

Agora, defina cada fator como igual a 0.

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = 3$$

Como os dois fatores são iguais, as soluções também serão. Logo, a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ possui apenas uma solução válida: $x = 3$. Uma solução que aparece duas vezes é chamada de *raiz dupla*.

Fale a Linguagem

Uma **raiz dupla** é a solução repetida de uma equação polinomial, o resultado de um fator repetido no polinômio.

Verifique a solução para se certificar de que 3 é uma resposta válida ao inseri-la de volta na equação original.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$3^2 - 6(3) + 9 = 0$$
$$9 - 18 + 9 = 0$$
$$0 = 0$$

Como 0 = 0 é uma afirmação verdadeira, a resposta está correta.

b. $3x^2 + 10x = -4x + 24$

Solução: Defina a equação como igual a 0 ao adicionar $4x$ e subtrair 24 dos dois lados.

$$3x^2 + (10x + 4x) + (-24) = (-4x + 4x) + (24 - 24)$$
$$3x^2 + 14x - 24 = 0$$

Fatore o trinômio usando o método da bomba, do Capítulo 11. Os dois números misteriosos que você está procurando são –4 e 18.

$$3x^2 + (-4 + 18)x - 24 = 0$$
$$3x^2 - 4x + 18x - 24 = 0$$
$$x(3x - 4) \;+\; 6(3x - 4) = 0$$
$$(3x - 4)(x + 6) = 0$$

Defina cada fator como igual a 0 e calcule.

$$3x - 4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 6 = 0$$
$$x = \frac{4}{3} \qquad\qquad x = -6$$

Substitua as soluções em $3x^2 + 14x - 24 = 0$, para garantir que elas são válidas.

$$3\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 14\left(\frac{4}{3}\right) - 24 = 0$$
$$3\left(\frac{16}{9}\right) + \frac{56}{3} - 24 = 0$$
$$\frac{16}{3} + \frac{56}{3} - 24 = 0$$
$$\frac{72}{3} - 24 = 0$$
$$24 - 24 = 0$$

$$3(-6)^2 + 14(-6) - 24 = 0$$
$$3(36) - 84 - 24 = 0$$
$$108 - 108 = 0$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Determine as soluções da equação $4x^3 = 25x$.

Completando o Quadrado

Resolver uma equação quadrática *completando o quadrado* força um quadrado perfeito à equação, o que pode ser facilmente eliminado com uma raiz quadrada. Essa maneira pode não ser a mais fácil, mas a sua força está na previsibilidade. O processo de completar o quadrado é como aquele cara que você conheceu no colégio, cujos pais fizeram com que ele levasse a própria prima para a formatura. Claro que foi estranho, e nenhum dos dois se divertiram muito, mas, pelo menos, os pais deles sabiam exatamente como a noite ia terminar (afinal de contas, era a *prima* dele, então não havia nenhum prospecto de "atividades extracurriculares" depois da formatura).

A boa notícia é que completar o quadrado *sempre* irá funcionar, diferente do método da fatoração, que é inútil quando o quadrático é primo. No entanto, você precisa dominar uma habilidade antes de completar o quadrado: usar raízes para eliminar expoentes em equações.

Fale a Linguagem

Esse procedimento é chamado de **completar o quadrado** porque, ao adicionar 16 aos dois lados do Exemplo 2, você está criando um trinômio que é um quadrado perfeito. Ele é fatorado como $(x + a)^2$.

Resolvendo Equações Exponenciais Básicas

De acordo com o Capítulo 12, elevar os dois lados de uma equação a uma potência de valor n elimina um radical com o índice n. Em outras palavras, para resolver a equação $\sqrt[4]{x-1} = 3$, você elevará os dois lados à quarta potência.

$$\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 = 3^4$$
$$x - 1 = 81$$
$$x = 82$$

Isso também funciona de forma contrária. Em outras palavras, você pode cancelar um expoente n ao tirar a raiz n. Por exemplo, para resolver a equação $5x^3 = 80$, isole a quantidade elevada ao expoente (assim como você deve isolar o radical para resolver uma equação radical).

$$\frac{5x^3}{5} = \frac{80}{5}$$
$$x^3 = 16$$

Para cancelar o expoente, extraia a raiz cúbica dos dois lados da equação.

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{16}$$
$$x = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$$
$$x = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}$$
$$x = 2\sqrt[3]{2}$$

Lembre-se de uma coisa ao cancelar o expoente: se ele é par, coloque um sinal de "±" no lado esquerdo da equação, onde aparece o sinal de radical. Por exemplo, para cancelar a potência par da equação $x^2 = 16$, insira um sinal "±" ao tirar a raiz quadrada dos dois lados da equação.

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Desinsetizando com Quadrados

Quando a fatoração falhar, você precisa de outra opção, outra maneira de resolver a equação quadrática. Um breve aviso antes que você comece: este problema contém referências escatológicas, e logo é censurado pelo Conselho Consultivo Nacional em Besteirol na Matemática.

Exemplo 2: Resolva a equação $2x^2 - 16x + 10 = 0$ completando o quadrado.

Solução: Você não pode fatorar o trinômio em dois binômios lineares, como no Exemplo 1(*a*) e 1(*b*) de algumas páginas atrás, então, você deve completar o quadrado.

Alerta do Kelley

Se você não obrigar o coeficiente de x^2 a ser 1, você ficará preso no Passo 4.

Passo 1: Garanta que o coeficiente de x^2 é 1. Se não for, divida tudo na equação por esse coeficiente. Nesse problema, o coeficiente de x^2 é 2, então, divida tudo por 2.

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{16x}{2} + \frac{10}{2} = \frac{0}{2}$$
$$x^2 - 8x + 5 = 0$$

Passo 2: Mova tudo para o lado esquerdo da equação, exceto a constante. Você quer os termos variáveis à esquerda e a constante sozinha no lado direito da equação. Nesse exemplo, isso significa subtrair 5 dos dois lados.

$$x^2 - 8x = -5$$

Passo 3: Inspecione os excrementos do inseto. Esse é o passo fundamental. Você vai adicionar um número misterioso aos dois lados da equação. Para descobrir qual número você deve adicionar, pegue metade do "coeficiente de x:" $\left(\frac{1}{2}(-8)=-4\right)$ e eleve-a ao quadrado $((-4)^2= 16)$. Nesse caso, você deve adicionar 16 aos dois lados da equação.

Não sei quando, por que ou como eu criei isso, mas, por anos, tenho usado um pequeno inseto de três segmentos (ilustrado na Figura 13.1) para me ajudar com o passo três. Ainda hoje, continuo desenhando o corpo dele (menos as pernas, olhos e outros detalhes que consomem muito tempo) nas margens, ao completar o quadrado.

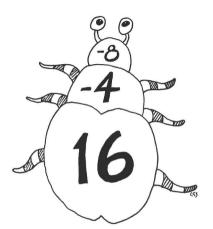



Figura 13.1

O inseto ingere o coeficiente do termo x (–8), come metade dele (–8 ÷ 2 = –4), e deixa um pedaço de "resíduo quadrado"(4^2 = 16).

Veja como meu pequeno amigo invertebrado de memorização funciona: o inseto come o coeficiente *x* (ponha o coeficiente *x*, incluindo o seu sinal, no segmento superior). Porém, ele é um inseto pequeno, com pouco apetite, e só consegue comer metade desse número (coloque metade do número do segmento superior, incluindo o seu sinal, no segundo segmento). Finalmente, depois que o número foi comido, ele deve, ahm, excretar alguns resíduos para completar o processo digestivo, e esse inseto só evacua excrementos *quadrados* (o quadrado do segmento do meio é escrito na extremidade traseira do inseto). Adicione esse número aos dois lados da equação.

$$x^2 - 8x = -5$$
$$x^2 - 8x + 16 = -5 + 16$$
$$x^2 - 8x + 16 = 11$$

Passo 4: Reescreva o lado esquerdo da equação como um quadrado perfeito. Quando fatorado, o lado esquerdo será $(x + a)^2$. E a parte legal é que o *a* em $(x + a)^2$ vem direto do estômago do inseto, então, neste caso,

$a = -4$, *pois o coeficiente de x é negativo.* Claro que você pode fatorar o trinômio usando o abdômen do inseto (é só uma fatoração comum), mas isso é um grande atalho quando frações e outros valores feios estão envolvidos.

$$(x - 4)^2 = 11$$

Passo 5: Elimine o expoente. Extraia a raiz quadrada dos dois lados da equação; não se esqueça de colocar um sinal de "±" no lado esquerdo da raiz Z.

$$\sqrt{(x-4)^2} = \pm\sqrt{11}$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{11}$$

Passo 6: Ache o valor de x. Nesse problema, isso significa adicionar 4 aos dois lados da equação.

$$x = 4 \pm \sqrt{11}$$

Logo, a equação quadrática $2x^2 - 16x + 10 = 0$ tem duas soluções: $x = 4 + \sqrt{11}$ e $x = 4 - \sqrt{11}$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Resolva a equação $x^2 + 6x - 3 = 0$, completando o quadrado.

A Fórmula Quadrática (ou de Bhaskara)

O método final que você pode usar para resolver equações quadráticas é chamado (apropriadamente) de fórmula quadrática. Como completar o quadrado, ela funciona para todas as equações quadráticas e é muito fácil de usar. Se você define uma equação quadrática como igual a 0, ela se parecerá com: $ax^2 + bx + c = 0$ (onde a, b e c são números reais). Para resolver a equação, insira a, b e c na fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa fórmula pode parecer feia, mas você precisa memorizá-la.

Exemplo 3: Resolva a equação $2x^2 - 5x = -1$ usando a fórmula quadrática.

Solução: Defina a equação como igual a 0 ao adicionar 1 aos dois lados.

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

Agora, a equação está na forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde $a = 2$, $b = -5$ e $c = 1$. Insira esses valores na fórmula quadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Como Eles Fazem Isso?

Perguntando-se de onde vem a fórmula quadrática? Ela também é um produto de excrementos de inseto? Na verdade, pode-se dizer que ela é. A fórmula quadrática é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando resolvida ao completar o quadrado.

A solução da equação quadrática $2x^2 - 5x = -1$ é $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$ ou $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$. Você pode reescrever a solução como $x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$ ou $x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$, mas nenhuma dessas frações pode ser simplificada, então, não há necessidade de fazer isso.

Você Tem Problemas

Problema 3: Resolva a equação $x^2 + 6x - 3 = 0$, do Problema 2, usando a fórmula quadrática, e verifique se a resposta obtida é a mesma.

Todos os Sinais Apontam para o Discriminante

Você já teve uma daquelas *Magic 8 Balls*? Elas se parecem com bolas de sinucas comicamente grandes, mas possuem uma janela plana, para que você possa ver o que está dentro – um dado de 20 lados flutuando em uma gosma azul opaca. Supostamente, a bola de bilhar tem poderes premonitórios; você faz uma pergunta, dá uma balançada, e lentamente, misticamente, como uma foca coberta de petróleo emergindo de um derramamento de óleo, um lado do dado aparecerá na janelinha e revelará a resposta à sua pergunta.

A equação quadrática contém uma espécie de *Magic 8 Balls*. A expressão $b^2 - 4ac$ abaixo do sinal de radical é chamada de discriminante, e diz quantas soluções uma equação quadrática possui, sem a necessidade da gosma azul premonitória.

Fale a Linguagem

O **discriminante** é a expressão $b^2 - 4ac$, definida na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. O sinal do discriminante indica quantas soluções reais possui a equação quadrática.

Você terá bastante trabalho para resolver equações quadráticas que não podem ser fatoradas – toneladas de aritmética infestam a fórmula quadrática, e um monte de passos novos são necessários para completar o quadrado. Então, é vantajoso olhar o além místico para garantir que uma equação quadrática par possua alguma solução real, antes que você gaste muito tempo tentando achá-la.

Veja como o discriminante funciona: dada uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, insira os coeficientes na expressão $b^2 - 4ac$. Preste bastante atenção no sinal do número resultante:

- Se você obtiver um número positivo, a equação tem duas soluções únicas.
- Se você obtiver 0, a equação tem exatamente uma solução: uma raiz dupla.
- Se você obtiver um número negativo, a equação não possui nenhuma solução real, apenas duas soluções complexas (porque elas contêm o valor $i = \sqrt{-1}$, discutido no Capítulo 12).

O discriminante não é mágico. Ele apenas mostra o quão importante é o papel de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ na fórmula quadrática. Veja o que acontece quando o radicando é 0:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

O sinal ± desaparece, levando consigo a possibilidade de uma segunda solução e, logo, garantindo uma raiz dupla. Se, contudo, $b^2 - 4ac$ é negativo, isto significa que há um negativo dentro de uma raiz quadrada – o que indica apenas soluções imaginárias.

Exemplo 4: Sem calculá-las, determine quantas soluções reais a equação $3x^2 - 2x = -1$ possui.

Solução: Defina a equação como igual a 0, ao adicionar 1 aos dois lados.

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

Defina $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$, e calcule o discriminante.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-2)^2 - 4(3)(1) \\ &= 4 - 12 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Como o discriminante é negativo, a equação quadrática não possui nenhuma solução real, apenas duas complexas.

Você Tem Problemas

Problema 4: Sem calculá-las, determine quantas soluções reais a equação $25x^2 - 40x + 16 = 0$ possui.

Resolvendo Inequações Quadráticas de Uma Variável

De acordo com o Capítulo 7, a solução para uma inequação simples é expressa como um gráfico em uma reta numérica. Isso ainda é verdade para inequações quadráticas como $2x^2 + x - 2 < 0$.

Quando você usa uma reta numérica ao invés de um plano cartesiano? O número de eixos no sistema de gráficos precisa ser correspondente ao número de variáveis únicas na inequação. Como $2x^2 + x - 2 < 0$ contém apenas *x* (e não *x* e *y*), é usada a reta numérica de um eixo, ao invés do plano cartesiano de dois eixos.

Chega de conversa; veja como resolver e desenhar uma inequação quadrática:

> **Fale a Linguagem**
>
> **Números críticos** são valores de *x* para os quais uma inequação é igual a 0 ou indefinida. Eles quebram a reta numérica em segmentos chamados de **intervalos**.

1. **Imagine que o símbolo de inequação é um sinal de igual e resolva a equação quadrática correspondente.** Essas soluções são os números críticos da inequação. Você não está mudando o sinal da inequação em um sinal de igual permanentemente – depois de achar os números críticos, mude-o novamente.

2. **Desenhe as soluções em uma reta numérica.** Marque os números críticos na reta numérica com pontos abertos ou fechados, caso os símbolos permitam ou não a possibilidade de igualdade (use pontos abertos para $<$ ou $>$ e pontos fechados para $\leq$ ou $\geq$).

3. **Use valores-testes para achar o(s) intervalo(s) da solução.** Os números críticos dividirão a reta numérica em segmentos chamados de intervalos. Escolha um valor-teste de cada intervalo e o insira de volta à inequação original para *x*. Se o valor-teste faz a afirmação ser verdadeira, assim também farão todos os outros valores nesse intervalo; então, ele representa pelo menos uma parte da solução (mais de um intervalo pode fazer a inequação verdadeira).

4. **Desenhe a inequação.** Escureça os segmentos da reta numérica que correspondem a cada intervalo da solução.

Apesar de o gráfico que você criou durante esse processo dizer qual é a solução, a maior parte dos professores quer mais do que apenas um gráfico. Eles querem uma resposta expressa como uma inequação.

Exemplo 5: Resolva a inequação $2x^2 + x - 2 < 0$ e desenhe a solução.

Solução: Finja, por um momento, que isso é a equação $2x^2 + x - 2 < 0$.

Infelizmente, essa equação quadrática não pode ser fatorado; então, você terá que usar a fórmula quadrática ou completar o quadrado para obter as soluções, que serão:

$$x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Esses números críticos são feios, então, é uma boa ideia digitá-los em uma calculadora, para achar a quais decimais eles se aproximam. Dessa maneira, você pode traçá-los na reta numérica, como na Figura 13.2. O sinal de inequação < não permite igualdade, então, use pontos abertos.

$$x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} \approx -1.28$$
$$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 0.78$$

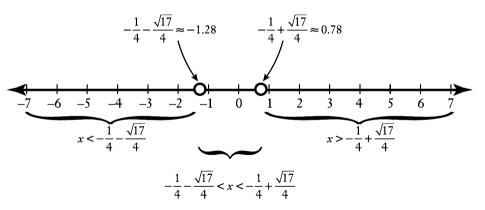



Figura 13.2

Os números críticos (aproximadamente –1,28 e 0,78) dividem a reta numérica em três intervalos.

Escolha um valor para representar cada intervalo (como $x = -2$, $x = 0$ e $x = 1$) e insira-os na inequação original, para ver qual valor produzirá afirmações verdadeiras.

Teste $x = -2$	Teste $x = 0$	Teste $x = 1$
$2(-2)^2 + (-2) - 2 < 0$	$2(0)^2 + (0) - 2 < 0$	$2(1)^2 + (1) - 2 < 0$
$2(4) - 2 - 2 < 0$	$2(0) - 2 < 0$	$2(1) + 1 - 2 < 0$
$8 - 4 < 0$	$0 - 2 < 0$	$2 - 1 < 0$
$4 < 0$ Falso	$-2 < 0$ Verdadeiro	$1 < 0$ Verdadeiro

Apenas o intervalo que contém $x = 0$ (o intervalo do meio, na Figura 13.2) faz a inequação ser verdadeira. Então ele representa a solução:

$$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} < x < -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Para desenhar a solução, escureça o intervalo da solução na reta numérica na Figura 13.2; você acabará com a Figura 13.3.

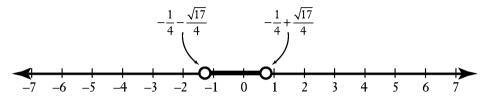



Figura 13.3

O gráfico da solução da inequação $2x^2 + x - 2 < 0$.

Você Tem Problemas

Problema 5: Resolva a inequação $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$ e desenhe a solução.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Ao completar o quadrado, o coeficiente principal deve ser 1.
- Completar o quadrado exige que você pegue metade do coeficiente x e o eleve ao quadrado; esse número deve ser adicionado aos dois lados da equação.
- A fórmula quadrática é $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- O discriminante $b^2 - 4ac$ é usado para determinar quantas soluções terá uma equação quadrática.

Capítulo 14

Resolvendo Equações de Alta Potência

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Resolver equações cúbicas e de maior grau
- Fatorar polinômios grandes
- Calcular raízes racionais e irracionais

Como você descobriu no Capítulo 13, os métodos usados para resolver equações lineares e equações quadráticas são completamente diferentes. Você está se perguntando: "Vou ter que aprender como resolver equações novamente toda vez que aumenta 1 grau?". Ou: "Vou ter que aprender uma nova língua (ou algo estranho e antiquado como latim ou talvez tão complicado quanto a linguagem dos golfinhos) para entender essas coisas?".

Eu tenho boas notícias para você; a resposta para essas duas perguntas é "não". As técnicas usadas para resolver equações de terceiro grau são as mesmas usadas para resolver equações de quarto, quinto, sexto e décimo quinto grau, não que você vá ver muitas dela. Na verdade, você pode até usar essas técnicas para voltar atrás e resolver equações lineares e quadráticas (se você está se sentindo nostálgico).

Não Há Como Escapar de Suas Raízes!

Antes que você lide com equações com grandes expoentes, pense como você resolve equações quadráticas por fatoração. Digamos que você tem uma equação quadrática definida como igual a 0, e você pode fatorá-la como $(x - a)(x - b) = 0$, onde a e b são números reais. Você se lembra o que fazer depois? Defina cada fator como igual a 0 e resolva essas equações para achar as soluções (que você também pode chamar de raízes da equação).

$$x - a = 0 \quad \text{ou} \quad x - b = 0$$
$$x = a \qquad\qquad x = b$$

Esse exemplo ilustra uma relação importante entre os fatores de um polinômio e suas raízes: se $x - a$ é um fator de um polinômio, então $x = a$ é uma solução, ou raiz, quando esse polinômio é igual a 0.

Excluindo toda a ladainha técnica, o que isso significa para você? Para achar as soluções de uma equação polinomial igual a 0, defina os seus fatores como iguais a 0 e resolva-os. Ocasionalmente, quando a fatoração é impossível, você terá que recorrer à fórmula quadrática.

Fale a Linguagem

As soluções de uma equação são chamadas de **raízes**.

Esse é o plano. Porém, há um problema. Você provavelmente sabe como fatorar algo como $x^2 - 4x + 3$, mas fatorar $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ é um assunto totalmente diferente! Se potências maiores estão envolvidas (e aqui me refiro a expoentes, e não à intervenção divina), como você deve fatorar? Boa pergunta. Continue lendo e tudo será revelado.

Encontrando Fatores

Ponto Crítico

Se as suas habilidades de divisão sintética estão um pouco enferrujadas, volte ao Capítulo 10 para uma revisão. Lembre-se de que o número mais à direita embaixo da linha horizontal é o resto.

Lembre-se: um fator é algo divisível por outra coisa. Em outras palavras, se x é um fator de y, então o quociente de $y \div x$ tem resto zero. Fatores funcionam da mesma maneira que polinômios. Se $x - m$ é um fator do polinômio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, então, o quociente de $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \div (x - m)$ tem resto zero.

Exemplo 1: Demonstre que $x - 3$ é um fator do polinômio $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e use essa informação para fatorar completamente a cúbica.

Solução: Se $x - 3$ é um fator de $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$, então, ao dividir essa expressão cúbica por $x - 3$, você deve obter resto 0. Porque $x - 3$ é linear, você pode usar a divisão sintética ao invés do processo mais entediante da divisão longa. Não se esqueça de escrever 3, e não –3, na caixa de divisão sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ & & 3 & -9 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

Ponto Crítico

Ao determinar se $x - 3$ é ou não é um fator de $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$, você está simultaneamente determinando se 3 é ou não é uma raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.

O resto é igual a 0, então $x - 3$ é um fator, e você pode reescrever o polinômio na forma fatorada: $(x - 3)(x^2 - 3x - 4)$. Repare que o quadrático à direita também pode ser fatorado: $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$. Logo, a versão totalmente fatorada de $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ é $(x - 3)(x - 4)(x + 1)$. A ordem dos fatores não importa, graças à propriedade comutativa da multiplicação.

Você Tem Problemas

Problema 1: Demonstre que $x + 2$ é um fator do polinômio $2x^3 + 5x^2 - 8x - 20$ e use essa informação para fatorar completamente o trinômio.

Resolvendo Equações Cúbicas a Passos de Bebê

Você já viu o filme *Nosso Querido Bob*, com Bill Murray e Richard Dreyfuss? Murray é um paciente sob cuidados psiquiátricos do guru da saúde mental, interpretado por Dreyfuss, que se beneficia da filosofia de "a passos de bebê". Parafraseando, essa filosofia consiste em olhar um problema complexo como uma série de passos pequenos e fáceis, ao invés de um pulo gigantesco do início ao fim.

De acordo com essa técnica terapêutica ficcional, mas útil, eu inseri um passo de bebê no processo de resolução de equações de alta potência. O Exemplo 1 pediu para você fatorar um polinômio, mas, no Exemplo 2, você irá fatorar o polinômio e depois dar um passo de bebê, resolvendo uma equação que contém esse polinômio. Não há muitas diferenças entre esses dois objetivos, mas, se não fosse por esse passo de bebê, você poderia tropeçar no próximo assunto. Então, confie em mim.

Ponto Crítico

Uma equação polinomial possui até *n* raízes racionais, onde *n* é o grau do polinômio. Ela pode ter menos, mas nunca mais.

Enquanto você resolve esses problemas, preste muita atenção na relação entre fatores e raízes dentro de uma equação de alta potência. Lembre-se que, se a é uma raiz de uma equação polinomial igual a 0, então $x - a$ é um dos fatores do polinômio – o sinal de a muda quando você converte uma raiz a um fator, e vice-versa.

Exemplo 2: Se 5 é uma raiz da equação $x^3 + x^2 - 22x - 40 = 0$, quais são as outras duas raízes?

Solução: Se 5 é uma raiz da equação, então $x - 5$ deve ser um fator. Use a divisão sintética para calcular o quociente $(x^3 + x^2 - 22x - 40) \div (x - 5)$. O Capítulo 10 disse para colocar a na caixa da divisão sintética quando você está fatorando (ou dividindo) $x - a$, e agora você sabe por que: você está, na verdade, escrevendo a raiz correspondente ali.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 1 & -22 & -40 \\ & & 5 & 30 & 40 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & 0 \end{array}$$

Então, $x^3 + x^2 - 22x - 40 = (x - 5)(x^2 + 6x + 8)$. Fatore o polinômio quadrático à direita e escreva a equação cúbica original em sua forma completamente fatorada.

$$(x - 5)(x + 4)(x + 2) = 0$$

Defina cada fator como igual a 0 e resolva essas equações.

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} x + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Se –2 é uma das raízes da equação $x^3 + 10x^2 + 7x - 18 = 0$, quais são as outras duas raízes?

Calculando Raízes Racionais

Não parece que você está "roubando" um pouquinho? O objetivo do capítulo é resolver, ou achar as raízes, de equações de alta potência, e, em todos os exemplos até agora, eu dei uma das raízes, ou um dos fatores, e pedi para você achar as outras baseadas nisso. O que acontece quando ninguém lhe oferece uma das

respostas, proporcionando o empurrão inicial de que você precisa, aquele número da divisão sintética que quebra o polinômio maior e mais feio em um quadrático que você pode fatorar por conta própria?

Fale a Linguagem

O **teste da raiz racional** usa o coeficiente principal e a constante de um polinômio para gerar uma lista de raízes racionais possíveis de uma equação polinomial. Infelizmente, a lista é muito mais longa do que a lista real de raízes racionais; então, algumas tentativas e erros são necessários para identificar as raízes reais.

Aí que entra o heroico e eficiente *teste da raiz racional*, que gera uma lista de todos os números que *possivelmente* podem ser as raízes racionais da equação. Isso é importante porque as raízes que você usará para fatorar, precisam ser racionais para a divisão sintética poder ser aplicada.

Basicamente, o teste da raiz racional é como um reconhecimento de suspeitos na delegacia de polícia local. Se você é testemunha de um crime, o policial poderá alinhar um monte de bandidos que correspondem à sua descrição da parte culpada e pedir para que você identifique o criminoso real dentre os suspeitos. Nem todas as pessoas ali serão culpadas pelo crime (pelo menos não do crime que você presenciou), então, é o seu trabalho identificar a parte ou as partes responsáveis num grupo maior de possíveis suspeitos.

Voltando ao mundo (um pouco mais chato) da matemática. Para alinhar todas as raízes racionais possíveis de uma equação, o teste da raiz racional olha o coeficiente principal e a constante de um polinômio. Mais especificamente, ele olha para os fatores desses números. Então, ele lista todas as frações possíveis da forma $\pm\frac{C}{L}$, onde C é um fator da constante e P é um fator do coeficiente principal. Isso parece estranho? Espere até você ver como funciona, no Exemplo 3 – não é tão ruim assim.

Depois que todos os possíveis suspeitos são identificados, é hora de separar os culpados (raízes) dos inocentes (não raízes). Use a divisão sintética, dando vez a cada raiz potencial dentro da caixa de divisão sintética para ver qual possui resto 0. Depois que você localizar o resto denunciador, fale para o policial pegar as algemas e volte ao reconhecimento, até que todos os culpados sejam presos. O grau do polinômio indica o número máximo de suspeitos, então, se um polinômio tem grau três, ele possui até três raízes racionais.

Exemplo 3: Identifique todas as raízes racionais para cada equação.

a. $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = 0$

Solução: Liste todos os fatores do coeficiente principal (2) e da constante (15).

Fatores de 2: 1, 2
Fatores de 15: 1, 4, 5, 15

O teste da raiz racional diz que todas as frações positivas e negativas que você pode criar com o numerador 1, 3, 5 ou 15 e o denominador 1 ou 2 são raízes racionais possíveis da equação. A maneira mais fácil de fazer a lista é pegar cada numerador possível e escrevê-lo acima de cada denominador possível.

$$\pm\frac{1}{1},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{1},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{5}{1},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{15}{1},\pm\frac{15}{2}$$

Ponto Crítico

Você não acertará sempre uma raiz real na sua primeira ou segunda tentativa em uma divisão sintética, mas continue tentando até achar o elusivo resto 0. Se o seu professor permite o uso de calculadoras gráficas, aqui está um truque: teste raízes que parecem ser interceptores *x* no gráfico do polinômio.

Uau! Há 16 possíveis suspeitos (8 positivos e 8 negativos), e apenas alguns deles são realmente culpados pelo crime de Atividade Criminal em Terceiro Grau (Equação). Tente-os na corte da divisão sintética, um de cada vez, até obter resto 0. Você pode começar por −1, sem nenhuma razão bombástica, a não ser por ele estar no começo da lista de suspeitos.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -9 & -8 & 15 \\ & & -2 & 11 & -3 \\ \hline & 2 & -11 & 3 & 12 \end{array}$$

Droga, esse não funcionou porque o resto foi igual a 12 (ao invés de 0). Bem, um suspeito liberado e mais 15 para terminarmos. Dessa vez, teste para ver se o oposto dele, 1 é uma raiz suja e podre.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -9 & -8 & 15 \\ & & 2 & -7 & -15 \\ \hline & 2 & -7 & -15 & 0 \end{array}$$

Sucesso! Se 1 é uma raiz, isso significa que $x - 1$ é um fator.

$$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x-1)(2x^2 - 7x - 15) = 0$$

Fatore a expressão quadrática restante.

$$(x - 1)(2x + 3)(x - 5) = 0$$

Defina cada fator como igual a 0 e calcule.

$$x-1=0 \quad \text{ou} \quad 2x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0$$
$$x=1 \qquad\qquad x=-\frac{3}{2} \qquad\qquad x=5$$

As raízes da equação são $-\frac{3}{2}$, 1 e 5.

b. $x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 27x + 90 = 0$

Solução: O coeficiente principal possui apenas um fator 1, mas os fatores da constante são 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90. Então, as possíveis raízes racionais são:

±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±9, ±10, ±15, ±18, ±30, ±45, e ±90

(Cada raiz possível tem o denominador 1.) Mais uma vez, comece pelo início da lista. Se você dividir sinteticamente −1, 1, −2 e 2, você terá restos "não-zeros", mas, depois que chegar ao −3, a sua sorte mudará.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & -3 & -19 & 27 & 90 \\ & & -3 & 18 & 3 & -90 \\ \hline & 1 & -6 & -1 & 30 & 0 \end{array}$$

Então, o polinômio pode ser fatorado como $(x + 3)(x^3 - 6x^2 - x + 30)$, mas continuará um trinômio feio, e não um binômio facilmente fatorado como nos exemplos anteriores.

Bem, de volta à lista dos suspeitos. Você não precisa tentar nenhuma raiz que já deu errado (elas continuarão não funcionando), mas, quando você testar outras raízes possíveis, use $x^3 - 6x^2 - x + 30$, ao invés de $x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 27x + 90$. Você verá que 3 também é uma raiz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & -1 & 30 \\ & & 3 & -9 & -30 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

Alerta do Kelley

Se você não usar o resultado com um grau menor da divisão sintética, toda vez que você achar uma raiz (ao invés do polinômio original), como no Exemplo 3(b), você nunca diminuirá o polinômio em um quadrático que você pode fatorar.

Depois que você fatorar $x + 3$ e $x - 3$ do quártico, restará $x^2 - 3x - 10$.

$$x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 27x + 90 = 0$$
$$(x+3)(x-3)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

Fatore o quadrático que falta ser resolvido.

$$(x+3)(x-3)(x-5)(x+2)=0$$

$$x+3=0 \qquad x-3=0 \qquad x-5=0 \qquad x+2=0$$
$$x=-3 \qquad x=3 \qquad x=5 \qquad x=-2$$

As raízes da equação são −3, −2, 3 e 5.

Você Tem Problemas

Problema 3: Identifique todas as quatro raízes racionais do polinômio $4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2 = 0$.

E Raízes Imaginárias e Irracionais?

Até agora, essas equações de alta potência funcionaram perfeitamente. No final, você sempre obtém um número total de raízes racionais, que são iguais ao grau do polinômio; então, você deve estar tentado a achar que isto sempre será verdade, mas, infelizmente, não é. Ocasionalmente, você acabará com algumas raízes irracionais (que contêm radicais que simplesmente se recusam a serem simplificados) ou raízes imaginárias.

Como Eles Fazem Isso?

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio de grau *n*, quando definido como igual a 0, possui exatamente *n* raízes. Elas podem ser reais, imaginárias, racionais ou irracionais, mas o número delas sempre será igual ao grau da equação. Observe que raízes imaginárias sempre virão em pares (que são conjugadas uma da outra) e que as raízes duplas serão contadas como duas raízes.

Você estará tentando localizar raízes racionais, quebrando polinômios em fatores menores e usando a divisão sintética, quando, de repente, você acabará com um quadrático que não poderá ser fatorado. Sem problemas – aplique a fórmula quadrática e simplifique.

Exemplo 4: Identifique todas as raízes de cada equação.

a. $x^3 - 8x^2 + 4x - 32 = 0$

Solução: Use o teste da raiz racional para gerar uma lista de suspeitos de possíveis raízes racionais.

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$$

Acredite ou não, a única raiz racional é 8.

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 1 & -8 & 4 & -32 \\ & & 8 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Fatore a equação para obter $(x - 8)(x^2 + 4) = 0$. Repare que $x^2 + 4$ é a soma de quadrados perfeitos (e não a diferença de quadrados perfeitos) e, logo, não pode ser fatorada. No entanto, você pode definir o fator como igual a 0 e resolver a equação.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= -4 \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= +2i \end{aligned}$$

As raízes da equação são 8, $2i$ e $-2i$. Repare que há três raízes (que correspondem ao grau do polinômio) e que as raízes imaginárias são conjugadas.

b. $x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 5x + 12 = 0$

Solução: Das possíveis raízes racionais (±1, ±2, ±3, ±4, ±6, e ±12), apenas −4 e 1 são válidas. Depois que você aplicar a divisão sintética para as duas raízes, você acabará com $(x - 1)(x + 4)(x^2 - x - 3) = 0$. A expressão quadrática é prima, então, quando igual a 0, aplique a fórmula quadrática.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

As raízes da equação são −4, 1, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$. Mais uma vez, o número total de raízes (duas racionais e duas irracionais, sendo um total de quatro) é igual ao grau do polinômio.

Você Tem Problemas

Problema 4: Identifique todas as raízes da equação $2x^3 - 5x^2 + 4x - 21 = 0$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- As soluções de uma equação também são chamadas de raízes.
- Se $x - b$ é um fator de um polinômio, então b é uma raiz da equação criada quando o polinômio é definido como igual a 0.
- O teste da raiz racional lista todas as raízes racionais possíveis de uma equação polinomial, baseadas em sua constante e no coeficiente principal.
- Uma equação polinomial de grau n sempre terá exatamente n raízes, apesar de algumas poderem ser irracionais ou imaginárias.

Parte 5 A Junção da Função

Em seu livro *Presa,* Michael Crichton descreve o horror do que pode acontecer quando nanomáquinas (pequenos robôs do tamanho de moléculas) perdem o controlem e causam destruição com sua fúria assassina. Nesta parte, você aprenderá sobre as nanomáquinas chamadas de funções, que energizam a matemática. Felizmente, elas são apenas teóricas e não apresentam nenhum risco físico a você, a não ser, claro, que você derrube o seu livro de álgebra no seu pé ou algo do tipo. E isso pode ser realmente doloroso.

Capítulo 15

Apresentando a Função

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Estabelecer diferenças entre funções e relações
- Combinar funções
- Criar funções
- Avaliar funções definidas por partes

Prepare-se, é hora de mudar as engrenagens algébricas. Tudo que vimos até aqui teve a ver com expressões e equações. Agora, apesar de continuar vendo as duas, você irá ver muito mais funções. Elas são bastante parecidas com equações e expressões, com as quais você está acostumado, mas as características que as fazem únicas, apesar de serem menores, têm grandes consequências.

Conhecendo Suas Relações

Antes que eu explique o que é uma função, preciso dar um passo atrás por um momento e discutir essas máquinas automáticas que vendem salgadinhos, biscoitos, refrigerantes etc. Como um ex-estudante universitário, aprecio a importância dessa alternativa automatizada.

A máquina que havia em meu dormitório, cambaleante mas fiel, esperançosamente chamada de "Lanches Gostosos" e centralmente localizada, na área da televisão, não se importava se eram duas horas da manhã quando você procurava por um pacote de biscoitos de manteiga de amendoim. Por apenas 50 centavos e um apertão no botão direito, você estava prestes a se deliciar com uma iguaria de manteiga de amendoim envolvida por celofane (e, inexplicavelmente, a ficar com os dedos laranjas).

No mundo matemático, há infinitas máquinas automáticas, chamadas de *relações*, regras que engolem um valor de entrada (como uma máquina engole uma moeda) e produzem outro número de saída (como uma máquina dispensa doces para as suas papilas gustativas e colesterol diretamente para as suas paredes arteriais).

Como você pode imaginar, a função de uma relação é definir o *relacionamento* entre as entradas e as saídas da máquina de biscoitos. Em outras palavras, uma relação fornece a resposta a "o que você me dará se eu lhe der isso?". A forma mais simples, então, para definir uma relação é listar as entradas e as saídas correspondentes como pares ordenados, assim:

$$s: \{(1,3), (2,7), (3,-1), (4,9), (5,-1), (5,0)\}$$

Essa relação, chamada de *s*, diz que a entrada de 1 resulta na saída de 3, graças ao par ordenado (1,3). Se você for até a máquina de salgadinhos *s* e apertar 1 na hora de inserir a moeda, um 3 cairá (possivelmente coberto de chocolate ou contendo amendoim). Matematicamente você escreve $s(1) = 3$, que é lido como "*s* de 1 é igual a 3". Similarmente, você pode escrever $s(2) = 7$, $s(3) = -1$, e assim por diante.

Algo estranho acontece com a máquina *s* quando você aperta 5. Reparou? De acordo com a definição de *s*, $s(5) = -1$ e $s(5) = 0$. Em outras palavras, se você insere 5 na relação, você pode obter uma resposta ou a outra. Você pode até mesmo obter as duas (se você balançar a máquina o suficiente, eu suponho).

Algumas relações recebem uma recomendação especial pelo serviço bom e de confiança; outras relações são chamadas de *funções*. No entanto, *s* nunca receberá essa recomendação, porque ela não cumpre a única exigência que faz uma relação ser uma função: toda entrada deve ser combinada com uma única saída. Já que *s* falha nesse teste (a entrada 5 é combinada com duas saídas possíveis, –1 e 0), ela não é uma função.

Fale a Linguagem

Uma **relação** é uma regra que aceita valores de entrada e produz valores de saída correspondentes. Se todas as entradas possuem apenas uma saída correspondente, então a relação é classificada como uma **função**.

Funções e relações raramente são escritas como listas de pares ordenados, porque a maioria possui muitas entradas, e escrever uma lista infinita de números não é uma maneira muito útil de aproveitar o tempo de ninguém. Ao invés disso, elas geralmente são escritas em termos da entrada, geralmente x, assim:

$$h(x) = 3x + 4$$

A relação h é também uma função, porque não importa pelo que você substitua x, você sempre obterá uma única resposta previsível e correspondente. Por exemplo, a entrada $x = -3$ sempre produzirá uma saída -5.

$$\begin{aligned} h(-3) &= 3(-3) + 4 \\ &= -9 + 4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Não importa quantas vezes você insira $x = -3$, você obterá -5 todas as vezes, e isso será válido para qualquer entrada.

Como Eles Fazem Isso?

Considere a relação r definida abaixo,

$$r: \{(-2,4), (-1,9), (0,4)\}$$

Há algo preocupante em r. Repare que $r(-2)$ e $r(0)$ são iguais a 4. Em outras palavras, se você inserir –2 ou 0, você obterá a mesma coisa: 4. Então, r é uma função? Sim, porque cada entrada corresponde a apenas uma saída.

Não há nenhuma regra que diz que você não pode obter a mesma saída para múltiplas entradas. Porém, há um nome especial para funções cujas entradas possuem uma única saída – elas são chamadas de funções injetoras.

Por enquanto, não se preocupe em como testar relações para determinar se elas são funções. No Capítulo 16, você será apresentado ao teste da reta vertical, uma maneira rápida de descobrir se uma relação é ou não uma função.

Atuando em Funções

Todas as vezes que aparece um novo conceito algébrico, as primeiras coisas que você normalmente aprende são como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir essas novas coisas (pense em frações, matrizes, polinômios e radicais, só para citar algumas). No entanto, como funções são formadas por coisas como frações, polinômios e radicais, combiná-las é fácil. A única coisa realmente nova que você irá aprender é a notação que usará para combinar as funções.

Exemplo 1: Dada as funções $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = x - 1$, identifique as seguintes funções e calcule cada uma quando $x = 2$.

a. $(f+g)(x)$

Solução: Adicione a função quadrática $f(x)$ à função linear $g(x)$ ao combinar os termos iguais.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (x^2-4x+3)+(x-1)\\ &= x^2+(-4x+x)+(3-1)\\ &= x^2-3x+2\end{aligned}$$

Calcule $(f+g)(2)$, como indicado no problema, substituindo $x = 2$ em $(f+g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f+g)(2) &= (2)^2-3(2)+2\\ &= 4-6+2\\ &= 0\end{aligned}$$

b. $(f-g)(x)$

Solução: Distribua –1 entre a quantia $x - 1$ antes de combinar os termos iguais.

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= (x^2-4x+3)-(x-1)\\ &= x^2-4x+3-x+1\\ &= x^2-5x+4\end{aligned}$$

Calcule $(f-g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f-g)(2) &= 2^2-5(2)+4\\ &= 4-10+4\\ &= -2\end{aligned}$$

c. $(fg)(x)$

Solução: Multiplique os polinômios ao multiplicar cada termo de $f(x)$ por cada termo de $g(x)$, um de cada vez.

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (x^2-4x+3)(x-1)\\ &= x^2(x)+x^2(-1)+(-4x)(x)+(-4x)(-1)+3(x)+3(-1)\\ &= x^3-x^2-4x^2+4x+3x-3\\ &= x^3-5x^2+7x-3\end{aligned}$$

Calcule $(fg)(x)$.

$$\begin{aligned}(fg)(2) &= 2^3 - 5(2)^2 + 7(2) - 3\\ &= 8 - 20 + 14 - 3\\ &= -1\end{aligned}$$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Solução: Porque $x - 1$ é um fator de $x^2 - 4x + 3$, você pode simplificar o quociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}\\ &= \frac{(x-3)\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\\ &= x - 3\end{aligned}$$

Calcule $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 2 - 3 = -1$$

Ponto Crítico

A forma que eu calculo $f(2)$ no final de cada parte do Exemplo 1 não é a única. Pegue a questão (*a*) como exemplo. Ao invés de inserir 2 na nova função $(f + g)(x)$, você pode inserir 2 em cada uma das funções originais, $f(x)$ e $g(x)$. Depois, é só adicionar os resultados.

$$\begin{aligned}f(2) &= 2^2 - 4(2) + 3\\ &= 4 - 8 + 3\\ &= -1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}g(2) &= 2 - 1\\ &= 1\end{aligned}$$

Portanto, $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = -1 + 1 = 0$, que é igual ao valor de $(f + g)(2)$ do Exemplo 1(a).

Você Tem Problemas

Problema 1: Dada as funções $h(x) = x^2 + 7x - 5$ e $k(x) = 4x - 3$, calcule:

a. $(h + k)(-1)$

b. $(h - k)(-1)$

c. $(hk)(-1)$

d. $\left(\frac{h}{k}\right)(-1)$

Composição das Funções

Durante a faculdade, meus amigos Matt e Chris e eu decidimos realizar um concurso, o tipo de competição intelectual apenas imaginada por aqueles que residem nos corredores frios da universidade – um embate entre a inteligência e a astúcia, criado em nossas mentes no auge de seus poderes funcionais. Basicamente, queríamos ver quem poderia enfiar a maior quantidade de cereais na boca antes de engasgar ou ficar asfixiado.

Chris ganhou. Eu não lembro o número absurdo de cereais que ele conseguiu esmagar em sua boca (e não recomendo que você tente isso em casa), mas admiro a determinação dele em não perder o concurso, apesar de não valer nada (exceto o direito de divulgar o título, claro). Até hoje, acredito que alguns cereais residem nas cavidades nasais dele como um troféu do evento, acidentalmente presos quando ele começou a ficar engasgado, os olhos arregalados, em pânico, com o súbito medo de morrer de uma maneira que o faria famoso na internet.

O Torneio de Cereais me ensinou duas grandes lições. Primeiro, estudantes universitários realmente sabem "criar a sua própria diversão"; e, segundo, é sempre mais divertido criar algum torneio com algo que você costuma fazer normalmente.

Alerta do Kelley

Se uma função $f(x)$ contém múltiplos x, e você está tentando criar a composição $f(g(x))$, certifique-se de inserir $g(x)$ em cada uma das variáveis x em $f(x)$.

Até agora, neste capítulo, você substituiu números reais em funções – em tamanhos normais, que as funções poderiam comer tranquilamente e cuspir depois. Agora, no entanto, as quantidades ingeridas serão maiores.

Ao invés de números únicos, você irá alimentar as funções usando outras funções, em um processo estranhamente canibal chamado de *composição de funções*.

Fale a Linguagem

O processo de substituição de uma função em outra é chamado de **composição de funções**, e pode ser denotado com um círculo: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

A intenção de inserir uma função $g(x)$ em outra função $f(x)$ é indicada pela notação $(f \circ g)(x)$, leia-se "f composto com g de x" ou "f círculo g de x". Essa pequena coisa redonda é, de fato, um círculo – um novo sinal que entra no grupo de +, –, ×, . , e ÷, e que basicamente significa "insira a função da direita na variável da função à esquerda". Algumas vezes, a composição da função é escrita explicitamente, assim: $f(g(x))$ (leia-se "f de g de x"), como em $f(2)$, só que, ao invés de inserir 2 na função, você irá inserir $g(x)$.

Exemplo 2: Se $g(x) = 2x - 1$, e $h(x) = x^2 + 3x$, encontre $(h \circ g)(x)$.

Solução: A expressão $(h \circ g)(x)$ significa a mesma coisa que $h(g(x))$, então, insira $g(x)$, que é igual a $2x - 1$, em $h(x)$ toda vez que você ver um x.

$$h(x) = x^2 + 3x$$
$$h(2x-1) = (2x-1)^2 + 3(2x-1)$$

Repare que $h(x)$ contém dois termos x, então, você tem que inserir $2x - 1$ em ambos.

$$\begin{aligned} h(2x-1) &= 4x^2 - 4x + 1 + 6x - 3 \\ &= 4x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

Depois que você supera o desconforto inicial de substituir uma variável por alguma coisa que possui uma variável, você está pronto para começar a compor funções maiores, até que você acidentalmente fique engasgado, transportando números e variáveis às suas cavidades nasais, como o meu amigo de faculdade Chris.

Você Tem Problemas

Problema 2: Se $f(x) = x^2 + 5$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, identifique as seguintes funções:

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

Funções Inversas

De acordo com o Capítulo 13, uma raiz com índice *n* cancela o expoente *n*. Por exemplo, para resolver a equação $(x-2)^2 = 5$, você pega a raiz quadrada dos dois lados: $\sqrt{(x-2)^2} = \pm\sqrt{5}$. Isso acontece porque quadrados e raízes quadradas são funções inversas.

Fale a Linguagem

Funções Inversas se cancelam se inseridas uma na outra. Em outras palavras, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. O inverso de $f(x)$ é escrito como $f^{-1}(x)$.

Funções inversas equilibram uma à outra no mundo matemático; elas representam a eterna batalha entre yin e yang, puxar e empurrar, direita e esquerda, muita diversão (como o Magic Kingdom, da Disney, e o MGM Studios, na Flórida) e muito tédio (como o Epcot Center, da Disney – "Ei, quem quer ver mais um filme de 45 minutos sobre a troposfera?).

Definindo Funções Inversas

Matematicamente falando, se você compõe funções inversas uma com a outra, elas se cancelam. Em outras palavras, se $f(x)$ e $g(x)$ são inversas entre si, então:

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

Viu como elas se cancelam? Se você insere $f(x)$ em $g(x)$ ou $g(x)$ em $f(x)$, você obtém a mesma coisa: x (a entrada da função mais profunda). Para denotar que $g(x)$ é o inverso de $f(x)$, você escreve $g(x) = f^{-1}(x)$ (leia-se "*g* de *x* é igual ao inverso de f de *x*" ou "*g* de *x* é o inverso de *f* de *x*"). Você também pode escrever $f(x) = g^{-1}(x)$. Apesar de a notação da função inversa se parecer com um expoente negativo, ela não é; então, não comece a pensar em calcular o inverso de $f(x)$ ou qualquer coisa do tipo.

Ponto Crítico

Apenas funções injetoras (cujas entradas correspondem a saídas únicas) possuem inversos. Por enquanto, quando eu pedir para você achar o inverso de uma função, você pode assumir que essa função é injetora. O Capítulo 16 oferecerá uma técnica que o ajudará a determinar se uma função é injetora ou não.

Funções inversas possuem outra propriedade legal: se reverter o par ordenado em uma função, você terá um par ordenado para a função inversa. Portanto, se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$. Se isso não faz sentido para você, pense dessa maneira: se você insere o número 2 em uma função $f(x)$ e obtém –7, então, ao inserir –7 em $f^{-1}(x)$ você obterá 2.

Exemplo 3: Demonstre que $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ são funções inversas.

Solução: Se $f(x)$ e $g(x)$ são inversas, então $f(g(x))$ e $g(f(x))$ devem ser iguais a x.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) + 3 \\ &= \frac{4}{4}x - \frac{12}{4} + 3 \\ &= x - 3 + 3 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(4x+3) \\ &= \frac{1}{4}(4x+3) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{4}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ &= x \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Demonstre que $(x) = 3\ x - 5$ e $g(x) = \frac{x+5}{3}$ são funções inversas.

Calculando Funções Inversas

Criar a função inversa $f^{-1}(x)$ para alguma função $f(x)$ é bastante simples – apenas siga esses passos:

1. **Reescreva $f(x)$ como y.** Isso introduzirá uma segunda variável na equação.
2. **Troque x e y.** Toda vez que você ver um x, troque-o por y, e vice-versa. É assim que você transforma a função em sua inversa. Lembre-se que uma função e sua inversa contêm pares ordenados reversos – se $f(x)$ contém o ponto (a,b), então $f^{-1}(x)$ contém (b,a).
3. **Ache o valor de y.** Isole y em um lado da equação.
4. **Reescreva y como $f^{-1}(x)$.** Você acabou. Vá fazer um sanduíche e relaxe.

Isso é tudo que irei falar sobre funções inversas. Agora que você pode encontrá-las sozinho e verificar se elas são inversas, já é o suficiente por enquanto. Há mais coisas a aprender sobre funções inversas (incluindo detalhes técnicos, como restrições de domínio), que são explicadas em cursos mais avançados, mas não abordarei aqui, porque seria desnecessariamente complicado.

Exemplo 4: Se $f(x) = \sqrt{x+2}$, determine $f^{-1}(x)$.

Solução: Reescreva $f(x)$ como y.

$$y = \sqrt{x+2}$$

Troque os x e y.

$$x = \sqrt{y+2}$$

Ache o valor de y. Para eliminar o sinal de radical, eleve os dois lados da equação ao quadrado (não adicione um sinal "±" você só faz isso ao calcular a raiz quadrada dos dois lados de uma equação).

$$x^2 = y + 2$$
$$x^2 - 2 = y$$

Reescreva y como $f^{-1}(x)$. Você também deve inverter os lados da equação para obter $f^{-1}(x)$ no lado esquerdo.

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Se $g(x) = 7x - 3$, identifique $g^{-1}(x)$.

Aposto Que Você Não Consegue Resolver Só Uma: Funções Definidas por Partes

Eu namorei algumas pessoas antes de conhecer a minha esposa. Quando eu era muito novo, imaginava que assim que conhecesse alguém que gostasse (e que gostasse de mim), iria me casar. Mal sabia que antes de tudo isso vinha o namoro, e isso era muito mais complicado do que eu pensava – é um exercício para determinar o que você consegue ou não aguentar em um parceiro.

Considere o seu próprio histórico amoroso. Uma pessoa é muito legal, mas muito insossa. A outra é muito autoconfiante, mas muito possessiva. E ainda tem aquela que tem uma personalidade repulsiva, mas não se importa com o seu chulé. Basicamente, o tempo todo que você está namorando, você está criando uma lista mental do parceiro perfeito: ele ou ela deve ser autoconfiante, mas não insistente; legal, mas não muito meloso; e deve conseguir aturar o cheiro dos dedos do seu pé quando você tira seus sapatos molhados. Felizmente, alguém que possui quase todas essas qualidades (e vamos encarar que você não ganhará nenhum troféu pelos seus pés) aparecerá, e você irá se dedicar completamente.

As coisas são um pouco diferentes com funções, você pode realmente criar a função perfeita – uma que possui todas as qualificações definidas por você. Na verdade, se você gosta de certas partes de diferentes funções, pode pegar as partes que gosta, costurá-las e criar uma nova função, que é uma colcha de retalhos das características da sua função preferida, chamada de *função definida por partes*.

As funções de pequenos componentes, que, juntas, abrangem a sua função do sonho, são ligadas por uma grande chave à esquerda que se parece com isso:

$$f(x)=\begin{cases} g(x), x \leq a \\ h(x), x > a \end{cases}$$

Fale a Linguagem

Uma **função definida por partes** é formada por duas ou mais funções que são restritas de acordo com a entrada. Cada função individual que faz parte da função definida por partes é válida para apenas alguns valores x.

A função $f(x)$ é formada por duas outras funções, $g(x)$ e $h(x)$. Você usará $g(x)$ toda vez que a entrada for menor que ou igual a a, mas inverterá e usará a outra função $h(x)$, sempre que a entrada for maior que a.

Alerta do Kelley

Você não está limitado a duas funções componentes dentro da chave. Desde que as restrições de entrada (como $x < a$ e $x > a$) não se sobreponham, o resultado é uma função. Por exemplo, considere $h(x)$:

$$h(x)=\begin{cases} x^2-3, x<4 \\ 2x+1, x \geq 0 \end{cases}$$

Repare que uma entrada $x = 1$ pode ser inserida nas duas funções, porque se $x = 1$, então $x < 4$ e $x \geq 0$. Portanto, $h(1) = 1^2 - 3 = -2$ e $h(1) = 2(1) + 1 = 3$.

Isso viola as exigências que todas as funções devem cumprir – a entrada $x = 1$ (entre outras) não é correspondente a uma saída; então, $h(x)$ não é uma função.

Exemplo 5: Considere a função definida por partes $m(x)$, como definida abaixo.

$$m(x)=\begin{cases} 4x-x^2, x \leq -1 \\ \sqrt{x+7}, -1 < x < 5 \\ x-16, x \geq 5 \end{cases}$$

Calcule:

a. $m(-3)$

Solução: Repare as restrições de entrada para determinar onde você deve inserir $x = -3$. Porque $-3 \leq -1$, você deve substituí-lo pela expressão do topo, $4x - x^2$.

$$\begin{aligned} m(x) &= 4x - x^2 \quad (\text{if } x \leq -1) \\ m(-3) &= 4(-3) - (-3)^2 \\ &= -12 - 9 \\ &= -21 \end{aligned}$$

b. $m(9)$

Solução: Substitua $x = 9$ pela expressão $x - 16$, porque $9 \geq 5$.

$$\begin{aligned} m(x) &= x - 16 \quad (\text{if } x \geq 5) \\ m(9) &= 9 - 16 \\ &= -7 \end{aligned}$$

c. $m(2)$

Solução: Porque $x = 2$ está entre os números –1 e 5, você o insere na expressão do meio, $\sqrt{x+7}$.

$$\begin{aligned} m(x) &= \sqrt{x+7} \quad (\text{if } \; -1 < x < 5) \\ m(2) &= \sqrt{2+7} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Dada a função $f(x)$ como definida abaixo, classifique os valores $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$, do menor ao maior.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 0 \\ x - x^2, & x > 0 \end{cases}$$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Uma relação combina entradas e saídas.
- Uma função é uma relação cujas entradas resultam em uma única saída correspondente.
- Ao inserir uma função em outra, você realiza a composição de funções.
- Uma função e sua inversa, quando compostas juntas, se cancelam.
- Uma função definida por parte é composta por outras funções com restrições de entrada.

Capítulo 16

Gráficos de Funções

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Desenhar gráficos usando força bruta e sutileza
- Caracterizar funções baseadas em seus gráficos
- Alargar, esmagar e mover gráficos
- Determinar o domínio e a imagem das funções

Apesar de você ter fatorado e resolvido equações lineares há algum tempo, ainda não mostrei os gráficos delas. Há um motivo para isso: eles podem assustá-lo um pouco. Você provavelmente está acostumado com retas simples e, agora, do nada, curvas aparecem na jogada. É uma mudança muito brusca.

É como sentar em frente à sua mãe na mesa de café da manhã um dia e ela mencionar, de forma casual, que há 12 anos é uma super-heroína e combate o crime chamada Garça Prateada. A sua mãe! A mesma senhora amável que levou

um bolo para a sua turma da quarta série quando foi o seu aniversário e limpa suas meias sujas.

Claro que por mais legal que seria ter uma mãe que, sozinha, pudesse acabar com os planos dos vilões de dominar o mundo, demoraria um tempo até você se acostumar. Metaforicamente falando, você irá fazer quase a mesma coisa a respeito dos gráficos. Enquanto alguns detalhes continuarão os mesmos (como o sistema de coordenadas), você terá que aprender novas técnicas para derrotar os novos inimigos. Afinal de contas, sua mãe precisa de um parceiro.

Segundo Verso, Igual ao Primeiro

A maneira mais fácil de desenhar uma equação linear é criar uma tabela, inserindo alguns valores de x para obter valores correspondentes de y. Apesar de este capítulo lidar com funções não lineares (ao invés de equações de retas), você pode usar as mesmas técnicas para desenhá-las. Insira alguns valores para x na função para obter as saídas correspondentes $f(x)$. Então, trace os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano.

Alerta do Kelley

Às vezes, quando inserir valores de x, você não obterá uma saída válida, de número real. Não tem problema. Isso significa que o número que você inseriu não é uma entrada válida para a função (para usar a terminologia que veremos mais tarde neste capítulo, o valor x não está no "domínio"). Continue inserindo diferentes valores de x até achar alguns que funcionem.

Ponto Crítico

O gráfico em forma de U de uma quadrática é chamado de parábola.

Por exemplo, se você inserir $x = 1$ em uma função $f(x)$ para obter $f(1)$, isso será correspondente ao ponto $(1, f(1))$ no plano. Depois de inserir valores x suficientes, você começará a descobrir como o gráfico se parece.

Exemplo 1: Desenhe o gráfico de $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ usando uma tabela de valores.

Solução: Você está ultrapassando a terra dos gráficos não lineares, então, terá que traçar mais do que dois ou três pontos. Você precisará experimentar um pouco mais. Se você inserir valores x que darão saídas grandes, elas serão muito difíceis de traçar. Tente outras entradas, até obter resultados menores.

No caso de $f(x) = (x+ 2)^2 - 4$, valores x menores que -5 ou maiores que 1 produzirão resultados

enormes. Porém, se você calcular $f(x)$ como valores inteiros entre –5 e 1, o gráfico de $f(x)$ começará a se materializar.

x	$f(x) = (x+2)^2 - 4$	$f(x)$
-5	$f(-5) = (-5+2)^2 - 4 = (-3)^2 - 4$	5
-4	$f(-4) = (-4+2)^2 - 4 = (-2)^2 - 4$	0
-3	$f(-3) = (-3+2)^2 - 4 = (-1)^2 - 4$	-3
-2	$f(-2) = (-2+2)^2 - 4 = 0 - 4$	-4
-1	$f(-1) = (-1+2)^2 - 4 = (1)^2 - 4$	-3
0	$f(0) = (0+2)^2 - 4 = (2)^2 - 4$	0
1	$f(1) = (1+2)^2 - 4 = (3)^2 - 4$	5

Para desenhar $f(x) = (x + 2)^2 - 4$, trace os pontos gerados pela tabela: (–5,5), (–4,0), (–3,–3), (–2,–4), (–1,–3), (0,0) e (1,5), como ilustrado na Figura 16.1.

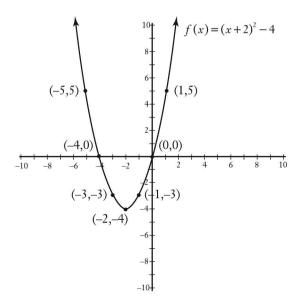



Figura 16.1

O gráfico de $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ passa entre cada ponto gerado pela tabela de valores.

Há uma coisa na Figura 16.1 à qual quero chamar a sua atenção. Esse gráfico (diferente dos gráficos lineares) tem dois interceptores x: $x = -4$ e $x = 1$. Os interceptores x também são chamados de zeros da função (porque $f(x)$ é igual a 0 para

Fale a Linguagem

Os **zeros** de uma função $f(x)$ são os seus interceptores x, os valores x que fazem a equação $f(x) = 0$ ser verdadeira.

esses valores x). Em outras palavras, os zeros de $f(x)$ e as raízes da equação $f(x) = 0$ são exatamente os mesmos.

Você Tem Problemas

Problema 1: Use uma tabela de valores para desenhar $g(x) = -|x - 5| + 3$.

Dois Importantes Testes de Retas

Há dois grandes testes em álgebra, um envolvendo retas verticais e outro que utiliza retas horizontais.

O Teste da Reta Vertical

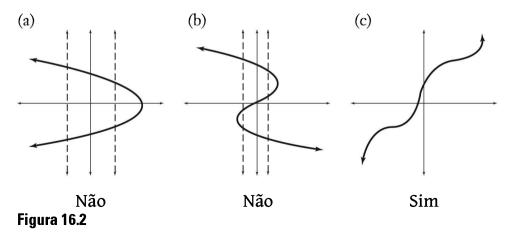
O *teste da reta vertical* permite que você olhe um gráfico e, imediatamente, saiba se ele é ou não o gráfico de uma função. Para aplicar o teste, pergunte a si mesmo: "Se eu fosse desenhar uma reta vertical em qualquer lugar no gráfico, quantas vezes essa linha cruzaria o gráfico?". Se a sua resposta é "A reta cortaria o gráfico *não mais de uma vez*", você tem uma função em suas mãos.

Fale a Linguagem

O **teste da reta vertical** pode determinar se uma relação é ou não uma função ao examinar o seu gráfico. O **teste da reta horizontal** usa uma técnica parecida para determinar se uma função é ou não injetora.

Dê uma olhada nos três gráficos da Figura 16.2, onde as retas verticais desenhadas nos gráficos (a) e (b) cortam o gráfico em dois lugares. As retas são pontilhadas para lembrá-lo de que elas não são de fato parte do gráfico – são apenas pequenas tiras usadas para o teste, como papéis de tornassol jogados fora depois de uma experiência.

Contudo, isso não é verdade para o gráfico (c). Nenhuma reta vertical cruza esse gráfico mais de uma vez; então, o gráfico representa uma função.

Figura 16.2

Os gráficos (a) e (b) não passam no teste da reta vertical, porque você pode desenhar retas verticais que cruzam os gráficos mais de uma vez.

> **Como Eles Fazem Isso?**
>
> Retas verticais no plano de coordenadas têm equações que se parecem com $x = c$, onde c é um número real. Quando você desenha retas verticais em um gráfico e encontra pontos de interseção, está identificando as saídas quando $x = c$ está inserido na função. Portanto, quando uma reta vertical cruza um gráfico duas vezes, há dois valores *y* (ou saídas) correspondentes a esse valor *x*, que significa que o gráfico não pode representar uma função.

O Teste da Reta Horizontal

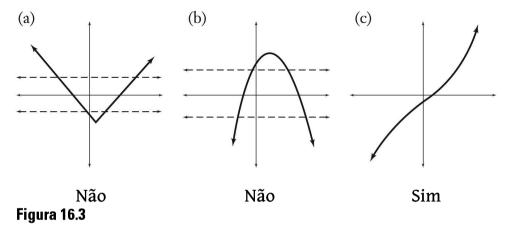
Depois que você sabe que uma relação é uma função, você pode dar um passo além e usar o teste da reta horizontal para determinar se uma função é ou não injetora. Lembre-se que apenas funções injetoras têm inversas, porque cada saída é combinada com apenas uma entrada. Não se preocupe em calcular o inverso de uma função, a não ser que ela passe no teste da reta horizontal.

O teste da reta horizontal funciona de forma bastante parecida com o teste da reta vertical. Imagine uma série de retas horizontais atravessando o gráfico. Se nenhuma dessas retas corta o gráfico mais de uma vez, então o gráfico passa no teste e é classificado como uma função injetora. Retas verticais e horizontais nesses testes podem não chegar perto do gráfico – elas só não podem cruzá-lo várias vezes.

Como Eles Fazem Isso?

Retas horizontais representam valores *y* (saídas); então, se elas cruzam o gráfico mais de uma vez, isso significa que múltiplos *x* possuem a mesma saída e a função não é 1-1.

A figura 16.3 mostra o teste da reta horizontal em ação. Como na Figura 16.2, muitas retas cortarão os gráficos (a) e (b) duas vezes (incluindo as retas pontilhadas exibidas); então, enquanto todos os três gráficos representam funções, apenas o (c) é de uma função injetora.

Figura 16.3

Apenas o gráfico (c) passa no teste da reta horizontal.

Você Tem Problemas

Problema 2: No Problema 1, você gerou o gráfico de $g(x) = -|x-5|+3$. Verifique se $g(x)$ é uma função e determine se ela é ou não uma função injetora.

Determinando Domínio e Imagem

É hora de abandonar as palavras "entrada" e "saída" e adotar a Terminologia Matemática Oficial (rufem os tambores!). Todos os números que você pode inserir em uma função coletivamente fazem parte do domínio dessa função. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Há um número real que você não pode substituir em $f(x)$: $x = 2$. Veja o que acontece quando você tenta.

$$f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$$

O resultado não é válido, porque dividir algo por 0 quebra as regras (outras regras incluem: nunca molhar as frações e nunca alimentá-las depois de meia-noite). Porque $x = 2$ não é uma entrada válida, é o único número real que não faz parte do domínio de $f(x)$.

Quando você descobrir o domínio de uma função inserindo todas aquelas entradas, isso o dará uma coleção de valores, chamada de imagem, o conjunto de saídas válidas da função. Entretanto, o domínio de uma função é normalmente infinito; então, inserir fisicamente todas as possíveis entradas na função é uma má ideia.

Fale a Linguagem

O **domínio** de uma função é um conjunto de entradas válidas, e a **imagem** é a coleção de saídas.

A melhor maneira de identificar o domínio e a imagem de uma função é executar versões modificadas dos testes das retas verticais e horizontais. Para achar o domínio, pergunte-se: "Se eu desenhar retas verticais pelo gráfico todo, quais o cruzarão? E quais não?". Todas as retas verticais que cortam o gráfico representam valores x no domínio. De forma parecida, imagine muitas retas horizontais sobrepostas na função. Qualquer reta que cruza o gráfico representa valores x da imagem.

Exemplo 2: Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$, dado o seu gráfico na Figura 16.4.

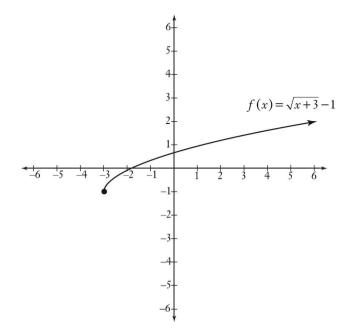



Figura 16.4

O gráfico de $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$.

Solução: O gráfico se estende infinitamente à direita mas para abruptamente no ponto (–3,–1). Qualquer reta vertical à esquerda de $x = -3$ (como $x = -3.5$, $x = -4$, $x = -5$ e assim por diante) não cruzará o gráfico, enquanto retas verticais com valores x maiores ou iguais a $x = -3$ cortarão. Portanto, o domínio de $f(x)$ é $x \geq -3$.

Ponto Crítico

Criar um denominador zero e causar um valor negativo dentro de um radical são os dois motivos mais comuns para um número ter que ser excluído do domínio de uma função.

E, caso você esteja pensando de onde veio o gráfico de $f(x)$ do Exemplo 2, não se preocupe – você aprenderá como desenhar isso, além de muitas outras funções, até o final do capítulo.

Agora, imagine retas horizontais espalhadas pelo plano cartesiano inteiro. A reta horizontal $y = -1$ encontra o ponto (–3,–1), mas qualquer reta horizontal abaixo disso irá passar embaixo do gráfico. Por outro lado, qualquer reta horizontal acima de $y = -1$ cruzará o gráfico em algum lugar. Apesar de o gráfico na Figura 16.4 ser superficial, ele alcançará alturas infinitas. Portanto, a imagem da função é $y \geq -1$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Identifique o domínio e a imagem de $g(x) = -|x-5| + 3$, a função referida nos Problemas 1 e 2 deste capítulo.

Importantes Gráficos de Funções

Não é educado da minha parte ficar falando de coisas que pode fazer com um gráfico de função sem ajudá-lo a fazer o gráfico também. Claro que você pode fazer qualquer gráfico ao criar uma tabela de valores, mas há maneiras mais rápidas de traçar gráficos sem ter que investir anos da sua vida. Porém, antes que você crie esses rascunhos, precisa memorizar alguns gráficos.

Na Figura 16.5 você achará os cinco gráficos básicos da álgebra. Memorize as suas formas gerais e características importantes – você estará fazendo rascunhos rápidos, não gráficos exatos. Se quiser entender como esses gráficos foram criados, crie uma tabela de valores e trace os pontos (como explicado

anteriormente, no Exemplo 1). No entanto, esses gráficos são os blocos de construção do método de esboço, explicado na próxima seção; então, é importante que você os crie da memória, ao invés de criá-los a partir do zero toda vez.

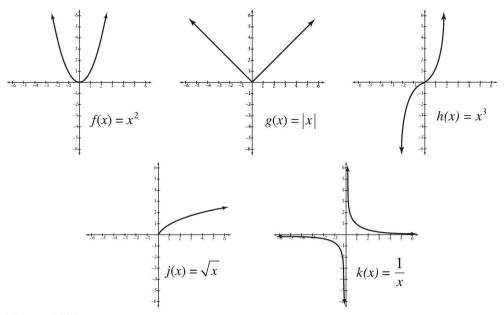



Figura 16.5

Os cinco gráficos algébricos fundamentais que você deve memorizar.

Aqui estão breves descrições de cada gráfico, para ajudá-lo a gravá-los no seu cérebro (por sinal, eu usei letras diferentes para diferentes funções, para que você possa diferenciá-las – como $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ – mas essas letras são arbitrárias, então, não preste muita atenção nelas).

- **$f(x) = x^2$ (Domínio: todos os reais; Imagem: $y \geq 0$)**

  Você pode elevar ao quadrado qualquer número real e o resultado sempre será positivo. Repare que o gráfico muda de direção na origem. Quando você o desenha da esquerda para a direita, ele diminui até (0,0), e aumenta depois disso.

Ponto Crítico

A Figura 16.5 contém gráficos de segundo grau (x^2) e de terceiro grau (x^3), mas nenhuma equação linear de primeiro grau. Isso acontece porque equações lineares e gráficos são abordados nos Capítulos 5 e 6 – apenas trate $f(x)$ como a variável y.

- **$g(x) = |x|$ (Domínio: todos os reais; Imagem: $y \geq 0$)**

  A função de valor absoluto aceita qualquer entrada de número real, mas apenas permite a saída de números positivos. Assim como $f(x) = x^2$, a função muda de direção na origem.

- **$h(x) = x^3$ (Domínio: todos os reais; Imagem: todos os reais)**

  A função cúbica produz saídas negativas quando alimentada por entradas negativas. A característica principal do gráfico é uma leve curva perto de $x = 0$, que o força a passar pela origem.

- **$j(x) = \sqrt{x}$ (Domínio: $x \geq 0$, Imagem: $y \geq 0$)**

  Você pode calcular a raiz quadrada de números reais apenas quando eles são positivos. Na adição, uma raiz quadrada sempre terá como saída um valor positivo; então, o domínio e a imagem estão severamente restritos aqui. Na verdade, o gráfico aparece apenas no primeiro quadrante, porque nos outros quadrantes x ou y (ou os dois) são negativos.

- **$k(x) = \frac{1}{x}$ (Domínio: $x \neq 0$, Imagem: $y \neq 0$)**

  Apesar de o gráfico se aproximar da reta vertical $x = 0$ e da reta horizontal $y = 0$, ele não toca nenhuma das duas. Inserir 0 em $\frac{1}{x}$ quebra a regra de "não dividir por zero", então, $x = 0$ não está no domínio. Além disso, não há nada que você possa inserir em $\frac{1}{x}$ que produzirá uma saída 0, então, 0 também não está na imagem. Esse é o único gráfico dos cinco que não contém a origem por essas razões. Porém, todos os números reais, com exceção de 0, pertencem ao domínio e à origem.

> **Ponto Crítico**
>
> O gráfico de $k(x) = \frac{1}{x}$ se aproxima, mas nunca toca as retas $x = 0$ e $y = 0$. Essas retas são as assíntotas do gráfico.

Passe um tempo com esses gráficos para memorizá-los. Certifique-se de que, ao lhe darem uma equação como $j(x) = \sqrt{x}$, você consiga desenhar o gráfico sem olhar a Figura 16.5. Depois que você possa fazer isso, é hora de colocar toda essa memorização chata em uso.

Desenhando Transformações das Funções

A maioria dos gráficos que você cria em álgebra é apenas uma leve versão dos gráficos da Figura 16.5. Desenhar a maior parte dos gráficos é tão fácil quanto transformar um desses cinco blocos de construção básicos. O que significa "transformar" os gráficos? Transformações são ajustes simples, como movê-los ao longo do plano cartesiano, alongá-los ou encolhê-los um pouco, ou invertê-los em torno de um dos eixos.

Todas essas coisas podem ser feitas ao colocar um número aqui ou um sinal negativo ali – pequenas mudanças fazem grandes diferenças em um gráfico.

Lembre-se de que os desenhos que você fez usando as transformações da função são tão exatos quanto os gráficos iniciais, mas não se preocupe em ser perfeito. Se você precisasse de um gráfico perfeito, você poderia traçar 500 pontos ou usar uma calculadora gráfica. Na maioria dos casos, rascunhos rápidos servem e, além do mais, aprender a desenhar dessa forma ensina a você como todos os coeficientes e todas as constantes em uma função afetam o gráfico dessa função.

Invertendo Funções

Como um domador de leões em um circo, que precisa apenas assoprar seu apito para fazer com que leões famintos realizem truques complicados (como dançar valsa um com o outro), pouco esforço é exigido para refletir um gráfico em um eixo (ou invertê-lo): apenas insira um sinal de negativo no lugar certo. Veja como o gráfico de uma função $f(x)$ é afetado quando você começa a inserir sinais negativos:

- **$-f(x)$ é o reflexo ao longo do eixo x.** Em outras palavras, se você multiplicar a função por −1, o gráfico se inverterá no eixo x. Cada coordenada x continuará a mesma, mas todas as coordenadas y serão opostas. Então, se $f(x)$ contém os pontos (a,b), $-f(x)$ contém $(a,-b)$.
- **$f(-x)$ é o reflexo ao longo do eixo y.** Se você inserir $-x$ na função ao invés de x, a coordenada x mudará para o seu oposto.

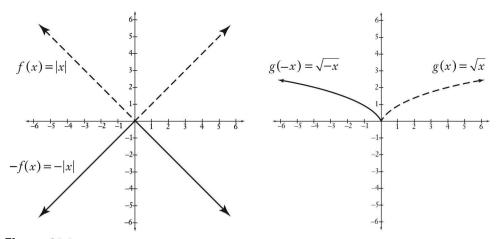



Figura 16.6

A localização do sinal negativo dita qual tipo de reflexo ocorrerá.

Cada uma dessas transformações é ilustrada na Figura 16.6. O gráfico da esquerda mostra que $f(x)=|x|$ e $-f(x)=-|x|$ são reflexos uns dos outros ao longo do eixo *x*. No gráfico da direita, $g(x)=\sqrt{x}$ é refletido ao longo do eixo *y*, quando você insere $-x$ na função.

Alongando Funções

Você pode usar mais do que sinais negativos para transformar funções; números também têm um efeito profundo. Novamente, a localização do número determina se ele afetará a altura ou a largura da função.

- **O gráfico de $a \cdot f(x)$ é, às vezes, tão alto quanto $f(x)$.** Se você multiplicar uma função por um número, então cada saída será multiplicada por esse número. Por exemplo, cada saída de uma função $4g(x)$ é exatamente quatro vezes mais alta que a saída correspondente de $g(x)$. Se *a* está entre 0 e 1, então o gráfico fica esmagado na direção do eixo *x*, ao invés de esticado verticalmente. Por exemplo, cada ponto no gráfico de $\frac{1}{2}f(x)$ é metade da distância do eixo *x* do que o ponto correspondente em $f(x)$.
- **O gráfico de $g(bx)$ é $\frac{1}{b}$ vezes a amplitude de $g(x)$.** Essa regra é meio bizarra. Pense dessa maneira: se você está inserindo *bx* em uma função, ao invés de *x* (onde *b* é um número real), então o gráfico ficará horizontalmente esmagado na direção da origem por um fator de *b* se $b > 1$. Se $b < 1$, o gráfico ficará horizontalmente alongado por um fator de *b*.

Como você pode observar no gráfico da esquerda da Figura 16.7, ao multiplicar $f(x)=\sqrt{x}$ por 2, o gráfico estica o dobro da sua altura original. O gráfico da direita mostra que ao inserir $\frac{1}{3}x$ em $g(x) = x^2$, o gráfico se alonga $\frac{1}{1/3}=3$ vezes mais amplamente.

Ponto Crítico

Lembre-se de que $\frac{1}{b}$ significa "o inverso de *b*"; então, $\frac{1}{1/3}$ é igual a 3, porque o inverso de $\frac{1}{3}$ é 3.

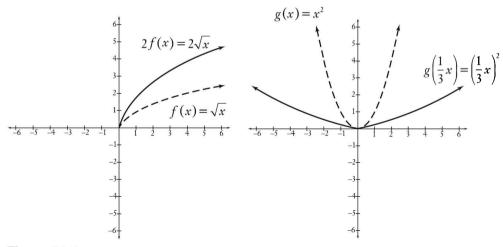



Figura 16.7

Multiplicar uma função por um número faz com que o gráfico se alongue ou se achate na direção de um dos eixos.

Movendo Funções

A transformação final também envolve números. Mas, dessa vez, ao invés de multiplicá-los, você irá adicioná-los à função.

- **Adicionar ou subtrair de uma função move o seu gráfico para cima ou para baixo, respectivamente.** Isso significa que o gráfico de $f(x) + 7$ é o gráfico de $f(x)$ movido sete unidades acima, e o gráfico de $g(x) - 1$ é o gráfico de $g(x)$ movido uma unidade para baixo.
- **Inserir $x + a$ em uma função move o gráfico unidades à esquerda ou à direita.** Se $a < 0$, o gráfico irá se mover à direita; se $a > 0$, o gráfico se moverá à esquerda. Isso é o oposto do que a sua intuição fala: subtrair a faz com que o gráfico se mova à direita, e adicionar a faz com que o gráfico se mova à esquerda.

Logo, adicionar ou subtrair de uma função a move verticalmente; mas fazer a mesma coisa dentro de uma função (adicionar ou subtrair a entrada x) a move horizontalmente. A Figura 16.8 ilustra essas mudanças horizontais e verticais do gráfico.

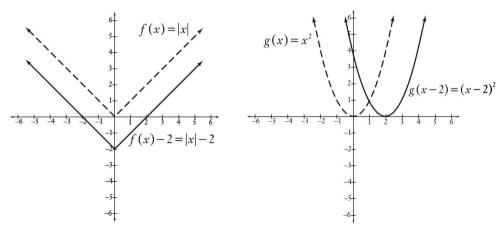



Figura 16.8

Adicionar uma constante à entrada de uma função move o gráfico da função horizontalmente, e adicionar uma constante à saída move o gráfico verticalmente.

Transformações Múltiplas

Quando você precisa desenhar uma função que tem mais de uma transformação feita, você deve realizar as transformações na ordem que esse capítulo as apresentou:

1. Reflexos
2. Alongamento/Esmagamento
3. Deslocamentos verticais/horizontais

É a mesma ordem que sigo quando acordo de manhã: olho-me no espelho (reflexo), faço alguns abdominais (alongamento) e depois vou para o trabalho (deslocamento).

Exemplo 3: Desenhe $f(x) = -2|x+3| + 5$.

Solução: Comece com um gráfico da função de valor absoluto $|x|$. Repare que o valor absoluto em $f(x)$ é multiplicado por −2, então, é invertido no eixo x e alongado verticalmente por um fator 2. Finalmente, o gráfico é movido 3 unidades à esquerda e 5 unidades para cima. Depois que a poeira baixar, você acabará com o gráfico da Figura 16.9.

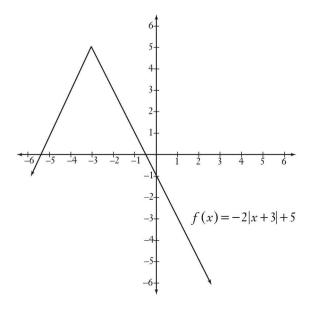



Figura 16.9

O gráfico de $f(x) = -2|x+3|+5$ é apenas uma versão turbinada do gráfico de $g(x) = |x|$.

Você Tem Problemas

Problema 4: Desenhe $g(x) = (-x)^3 - 2$.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- O domínio de uma função é a coleção de todas as suas entradas válidas; a imagem de uma função consiste em todas as saídas válidas.
- O teste da reta vertical determina se um gráfico representa ou não uma função; o teste da reta horizontal determina se uma função é ou não injetora.
- Inserir um negativo em uma função faz com que o seu gráfico reflita em um dos eixos.
- Multiplicar uma função por um número fará com que o gráfico se alongue ou se achate horizontalmente ou verticalmente.
- Adicionar a ou subtrair de uma função provoca um deslocamento horizontal ou vertical em seu gráfico.

Parte 6 Por Favor, Seja Racional!

Bem lá atrás, no Capítulo 2, frações vagavam pela Terra. Com elas vieram conceitos, como o menor denominador comum (junto com outros termos que fazem o mais robusto e valente homem chorar), e operações nessas frações, como a adição e a divisão. Você deve ter pensado que frações era história antiga, mas, nesta parte, até as frações mais ferozes abaixam suas cabeças – frações com polinômios em seus numeradores e denominadores.

Capítulo 17

Expressões Racionais

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Reduzir frações contendo polinômios
- Realizar operações básicas em expressões racionais
- Eliminar frações dentro de frações

Há muitas palavras chiques na língua portuguesa para descrever coisas nojentas; até os conceitos mais angustiantes não soam tão ruins se tiverem um nome bonito. Por exemplo, quem quer ir à "guerra" quando um "conflito" soa bem menos ameaçador? A maioria das pessoas são contra "aumentos de impostos" mas não seriam automaticamente contra um "aumento de salário".

Na matemática, quando você menciona a palavra "fração", as pessoas entram em pânico. Elas suam, seus olhos movem-se nervosamente e, então, elas saem correndo da sala. Como um ex-professor de matemática do ensino médio, eu sei disso por experiência própria.

Uma manhã, em uma aula de álgebra básica, anunciei que iríamos falar sobre frações, e um estudante na primeira fila saiu correndo como um animal assustado. Ele correu para a porta, mas, no caminho, uma perna da sua calça ficou presa

na mesa de outro aluno. Ele não conseguiu liberar a roupa do obstáculo e *acabou cortando a própria perna para se soltar*.

Bem, talvez eu tenha exagerado um pouco, mas o medo inato de frações que é partilhado por muitas pessoas não é menos real. (Ele na verdade tropeçou em uma cadeira ao ir apontar o lápis, mas isto não é uma história dramática.) Então, em uma tentativa mal disfarçada de manter as coisas tranquilas, este capítulo tem o nome de "Expressões Racionais", em vez de "Frações estão de volta, e dessa vez é pessoal".

O Capítulo 1 explicou que um número racional (e também uma expressão racional) é um número que pode ser expresso como uma fração, mas, por alguma razão, a palavra "racional" não instiga tanta dor e tanto medo quanto a palavra "fração" – assim como a palavra "ator mirim" não inspira o mesmo medo que a palavra "palhaço maníaco assustador".

Simplificando Expressões Racionais

O plano de ação para este capítulo deve ser familiar. A apresentação de um novo (ou, neste caso, velho mas subitamente complicado) conceito começa quando aprendemos a adicionar, subtrair, multiplicar e dividir as novas coisas. No entanto, expressões racionais são frações; então, você precisa adicionar mais uma habilidade a essa lista: reduzir frações.

Antes que você simplifique frações contendo polinômios, pense no processo usado para simplificar frações no Capítulo 2. Na época, falei que a melhor maneira de reduzir uma fração era dividir tanto o seu numerador quanto o denominador por qualquer fator comum. Agora, quero mostrar a você por que isso funciona.

Ponto Crítico

Se você começou com $2 \cdot 6$ na sua tentativa de determinar a fatoração prima de 12, você obteve o mesmo resultado final: $2 \cdot 6 = 2 \cdot (3 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Isso acontece porque todo número possui uma única fatoração prima (de acordo com algo chamado de Teorema Fundamental da Álgebra).

Considere a fração $\frac{12}{30}$. Reescreva o numerador e o denominador como um produto de fatores primos. Isso significa quebrar cada número em um produto e, depois, fatorá-los, até só restar números primos. Por exemplo, você pode multiplicar $4 \cdot 3$ para obter 12 (o numerador). Porém, isso não é uma fatoração prima porque 4 não é um número primo, então, reescreva 4 também como um produto: $4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Todos esses números são primos, então, essa é a fatoração prima que você está procurando. Agora é hora de fatorar o denominador, 30, em primos. Repare que $3 \cdot 10 = 30$, mas 10 não

é um número primo. Fatore-o como $2 \cdot 5$, e você terá a fatoração de 30: $2 \cdot 3 \cdot 5$. Reescreva a fração $\frac{12}{30}$ usando essa sequência de fatores.

$$\frac{12}{30} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Se algum fator no numerador tem um gêmeo no denominador, anule esses dois números gêmeos. Aqui, você deve cortar um par de 2 e um par de 3

$$\frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5}$$

A forma reduzida da fração é $\frac{2}{5}$.

Como Eles Fazem Isso?

É permitido que você corte fatores correspondentes no numerador e no denominador porque qualquer número diferente de 0 dividido por si mesmo é igual a 1.

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Em resumo, para reduzir (ou simplificar) uma fração, fatore o numerador e o denominador e depois elimine pares correspondentes de fatores em lados opostos da barra de fração. Muito fácil, né? Fatore, corte, acabou. Faça a mesma coisa quando encontrar polinômios na fração.

Exemplo 1: Simplifique a expressão $\frac{9 - x^2}{x^2 + x - 12}$.

Solução: Comece fatorando o numerador e o denominador. Repare que o numerador é a diferença de quadrados perfeitos.

$$\frac{(3 - x)(3 + x)}{(x + 4)(x - 3)}$$

Uau! Nenhum fator correspondente. Apesar de $3 - x$ e $x - 3$ serem próximos, eles não são iguais. Porém, eles serão correspondentes se você fatorar $3 - x$ como $3 - x = -1(-3 + x)$.

$$\frac{-1(-3 + x)(3 + x)}{(x + 4)(x - 3)}$$

Alerta do Kelley

Não fique tentado a cortar os x na fração $\frac{-3 - x}{x + 4}$, porque os x são adicionados às coisas. Você pode cortar apenas pares de fatores correspondentes que são *multiplicados*.

Se você pensar sobre isso, $-3 + x$ e $x - 3$ são iguais (graças à propriedade comutativa da adição, você está apenas adicionando x e -3 cada vez em uma ordem diferente), então você deve cortar esses fatores correspondentes.

$$\frac{-1\cancel{(-3 + x)}(3 + x)}{(x + 4)\cancel{(x - 3)}} = \frac{-1(3 + x)}{x + 4}$$

É comum deixar uma expressão racional reduzida na forma fatorada, assim (especialmente depois, quando você terá um monte de fatores no numerador e no denominador), mas também é igualmente correto distribuir o –1 no numerador, se você se sentir inclinado.

$$\frac{-3-x}{x+4}$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Simplifique a expressão $\frac{2x^3+5x^2-3x}{6x^2+7x-5}$.

Combinando Expressões Racionais

Depois que tiramos o vocabulário sofisticado, expressões radicais são apenas frações, então, para adicioná-las ou subtraí-las, ainda será preciso que você encontre um menor múltiplo comum (MMC). Infelizmente, a técnica do Grandão, descrita no Capítulo 2, não funciona quando variáveis estão envolvidas – você precisará usar um método mais formal:

1. Fatore todos os polinômios do denominador.
2. Faça uma lista que contenha uma cópia de cada fator, todos multiplicados juntos.
3. A potência de cada fator nessa lista deve ser a maior potência a que o fator é elevado em qualquer denominador.
4. A lista de fatores e potências, multiplicados juntas, é o MMC.

Ponto Crítico

Você pode usar o método formal para calcular o MMC com números também – apenas use fatorações primas dos números. Por exemplo, para calcular o MMC de $\frac{5}{36}$ e $\frac{11}{40}$, comece gerando as fatorações primas dos denominadores.

$$36 = 4 \cdot 9 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$$
$$40 = 5 \cdot 8 = 5 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 5$$

Há três fatores diferentes: 2, 3 e 5. O MMC será o produto desses fatores, quando cada um é elevado à maior potência que atinge nas fatorações. O fator 2 aparece duas vezes, como 2^2 e 2^3; você deve usar a versão 2^3 no MMC, porque ela possui a maior potência. Os números 3 e 5 aparecem apenas uma vez, então, use as potências ligadas a eles: 3^2 e 5^1.

Portanto, o MMC de $\frac{5}{36}$ e $\frac{11}{40}$ é:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Se achar o mínimo múltiplo comum é como ir a um baile, então considere esse método como a calça do seu terno, enquanto a técnica do Grandão seria uma calça jeans batida. Ambas vestem você, mas nenhuma é apropriada para todas as circunstâncias – depende para qual tipo de baile você vai. Não há nada de errado em ir informal se uma fração contém apenas números, mas se você avistar variáveis, você terá que se arrumar todo com o método formal. Na verdade, se pudesse escolher, eu preferia nem ir, porque a minha técnica de dança se parece com alguém caminhando sobre uma cerca elétrica.

Depois de descobrir o mínimo múltiplo comum, você pode forçar para que todos os denominadores sejam correspondentes e, depois, adicionar as frações.

Exemplo 2: Simplifique a expressão.

$$\frac{2x+4}{x^2-12x+36}-\frac{3x}{x^2+2x-48}$$

Solução: Comece fatorando os denominadores.

$$\frac{2x+4}{(x-6)^2}-\frac{3x}{(x+8)(x-6)}$$

Há dois fatores diferentes nos denominadores, $x - 6$ e $x + 8$, então, escreva-os multiplicado: $(x - 6)(x + 8)$. Repare que $x - 6$ aparece nos dois denominadores, então, para criar o MMC, use o elevado à maior potência: $(x - 6)^2$ ao invés de $(x - 6)^1$. Portanto, o MMC é $(x - 6)^2(x+ 8)$. Não multiplique os fatores do MMC juntos – deixe-os como estão.

Compare cada denominador com o MMC. De qual fator, se algum, cada denominador precisa para corresponder ao MMC? A fração esquerda precisa de $x+ 8$ e a fração direita precisa de outro $x - 6$. Multiplique tanto o numerador como o denominador de cada fração pelo fator ou fatores de que eles precisam para fazer com que os denominadores fiquem completos.

$$\left(\frac{x+8}{x+8}\right)\cdot\frac{2x+4}{(x-6)^2}-\frac{3x}{(x+8)(x-6)}\cdot\left(\frac{x-6}{x-6}\right)$$

Multiplique apenas os numeradores juntos, deixando os denominadores (agora correspondentes) sozinhos.

$$\frac{2x^2+20x+32}{(x-6)^2(x+8)}-\frac{3x^2-18x}{(x-6)^2(x+8)}$$

Agora que as frações possuem denominadores comuns, você pode combinar os seus numeradores e escrevê-los em cima do denominador comum. A segunda fração é subtraída, então, o sinal negativo precisará ser distribuído ao longo de todo numerador.

$$\begin{aligned}&\frac{2x^2+20x+32-\left(3x^2-18x\right)}{(x-6)^2(x+8)}\\&=\frac{2x^2+20x+32-3x^2+18x}{(x-6)^2(x+8)}\\&=\frac{\left(2x^2-3x^2\right)+(20x+18x)+32}{(x-6)^2(x+8)}\\&=\frac{-x^2+38x+32}{(x-6)^2(x+8)}\end{aligned}$$

Neste momento, você precisa conferir se o numerador pode ser fatorado. Se puder, então verifique se há fatores correspondentes no numerador e no denominador, para ver se a fração pode ser simplificada; neste caso, o numerador é primo. A resposta $\frac{-x^2+38x+32}{(x-6)^2(x+8)}$ está ótima, mas, se você precisar multiplicar os termos no denominador, você obterá $\frac{-x^2+38x+32}{x^3-4x^2-60x+288}$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique a expressão $\frac{x}{x^2-4}+\frac{8}{x^2-7x+10}$.

Multiplicando e Dividindo Racionalmente

Meu filho Nicholas, de nove meses, tem comido papinha há algumas semanas. Ele ainda não está na fase de comidas sólidas e também não consegue comer sozinho, mas se você der uma colher com qualquer coisa líquida, ele engolirá. Bem, de vez em quando. Tem sempre a possibilidade de ele espirrar, sem nenhum aviso, e sujar meu rosto e meus óculos com mingau semimastigado (o que pode ser um verdadeiro presente, se eu estiver de boca aberta quando isso acontecer).

Ele também é bom em assoprar (que é tão efetivo quanto espirrar) e no movimento mais simples de cuspir qualquer coisa que está na boca para o seu colo. Claro que o sistema digestivo dele funciona da mesma maneira que o meu, e quando ele decidir comer a comida que está em sua boca, a mecânica funcionará da mesma maneira que comigo – mastigar, engolir, digerir, deixar a fralda fedorenta (na verdade, o passo final é exclusivo dele).

É suficiente dizer que, apesar de ele e eu digerirmos da mesma forma, ele é mais bagunceiro ao comer (ao contrário dele, eu raramente termino com comida

nas minhas sobrancelhas). Por extensão, você usa as mesmas técnicas para multiplicar e dividir frações, caso elas contenham números simples ou polinômios mais elaborados. Apesar de funcionarem da mesma maneira, isso não significa que elas sejam iguais. Como o meu filho, frações polinomiais tendem a ficar mais bagunçadas, como você provavelmente reparou ao adicioná-las e subtraí-las na seção anterior.

Lembre-se de que você não precisa de denominadores comuns para calcular um produto ou um quociente – apenas multiplique os numeradores e divida pelos denominadores multiplicados.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Já que estou trazendo o passo à tona, ao lembrar de multiplicação de frações. Aqui vai outra informação histórica: divisão é a mesma coisa que multiplicação pelo inverso; para achar um quociente de duas frações, inverta a fração que você está dividindo e mude o sinal de divisão para um sinal de multiplicação.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemplo 3: Simplifique as expressões.

a. $\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15} \cdot \dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$

Solução: Reescreva essa expressão como uma fração e mantenha os numeradores em cima e os denominadores embaixo.

$$\frac{(2x-1)(x-5)}{\left(x^2-2x-15\right)\left(2x^2+5x-3\right)}$$

Em vez de multiplicar o denominador, fatore-o.

$$\frac{(2x-1)(x-5)}{(x-5)(x+3)(2x+1)(x+3)}$$

ATENÇÃO

Alerta do Kelley

Não se esqueça de simplificar suas respostas ao terminar de multiplicar ou dividir. Se todos os fatores do numerador e do denominador forem eliminados, coloque 1 onde os fatores estavam (como no numerador da resposta do Exemplo 3a). Não fique tentado em colocar um 0 ali, apesar de parecer que não restou nada.

Simplifique a fração, cortando os pares de fatores correspondentes no numerador e denominador.

$$\frac{\cancel{(2x-1)}\,\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}\,(x+3)\,\cancel{(2x-1)}\,(x+3)} = \frac{1}{(x+3)^2} \text{ or } \frac{1}{x^2+6x+9}$$

As duas formas da resposta estão corretas.

b. $\dfrac{x^4-4x^3-21x^2}{4x^2-9} \div \dfrac{2x^3-19x^2+35x}{8x^3+27}$

Solução: Comece tirando o inverso da fração à direita e mudando o problema, de divisão para multiplicação. A fração à esquerda continua igual.

$$\frac{x^4-4x^3-21x^2}{4x^2-9} \cdot \frac{8x^3+27}{2x^3-19x^2+35x}$$

Escreva o produto como uma única fração, fatorando cada uma das quatro expressões (se você não se lembra da fórmula de fatoração da soma de cubos perfeitos, volte ao Capítulo 11).

$$\frac{\left(x^4-4x^3-21x^2\right)\left(8x^3+27\right)}{\left(4x^2-9\right)\left(2x^3-19x^2+35x\right)}$$
$$= \frac{x^2\left(x^2-4x-21\right)\left(8x^3+27\right)}{\left(4x^2-9\right)(x)\left(2x^2-19x+35\right)}$$
$$= \frac{x^2(x-7)(x+3)(2x+3)\left(4x^2-6x+9\right)}{(2x+3)(2x-3)(x)(x-7)(2x-5)}$$

Para facilitar a simplificação, reescreva o fator monomial x^2 em sua forma fatorada, $x \cdot x$. Quando você reduz a fração, um dos x irá se cancelar com o x no denominador.

$$\frac{\cancel{x} \cdot x\,\cancel{(x-7)}\,(x+3)\,\cancel{(2x+3)}\,\left(4x^2-6x+9\right)}{\cancel{(2x+3)}\,(2x-3)\,\cancel{(x)}\,\cancel{(x-7)}\,(2x-5)}$$
$$= \frac{x(x+3)\left(4x^2-6x+9\right)}{(2x-3)(2x-5)}$$

Mais uma vez, não há necessidade de multiplicar esses fatores – uma resposta final na forma fatorada é suficiente. Porém, se você é obrigado a multiplicar, você acabará com $\dfrac{4x^4+6x^3-9x^2+27x}{4x^2-16x+15}$

Você Tem Problemas

Problema 3: Simplifique a expressão $\dfrac{x^2-4x-12}{3x^2-10x-8} \div \dfrac{x^2-3x-18}{3x+2}$.

Como Eles Fazem Isso?

Uma das regras exponenciais do Capítulo 3 afirmou que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$. O exemplo 3(b) demonstra por que isso é verdade. Nesse exemplo, você reescreveu x^2 como $x \cdot x$ e depois cancelou os fatores para reduzir a fração. Considere a fração $\frac{x^{10}}{x^7}$; de acordo com a regra acima, $\frac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$. Se você escrever x^{10} e x^7 como uma série de x e cancelar pares de numeradores/denominadores, obterá a mesma resposta. Sete dos x no numerador cancelam os sete x no denominador, ficando assim: $\frac{x^3}{1} = x^3$.

$$\frac{x^{10}}{x^7} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{x \cdot x \cdot x}{1} = x^3$$

Encontrando Frações Complexas

Se você odeia frações, então você não será fã de *frações complexas*. Só o nome já parece assustador, certo? Frações já são difíceis o suficiente, mas, frações *complexas*? Ótimo! Eu imagino que uma cirurgia no cérebro deve ser bem difícil de ser feita, mas uma cirurgia complexa no cérebro parece ainda pior. Na verdade, esse seu medo é, provavelmente, injustificado, pois o termo "fração complexa" é uma propaganda enganosa por dois motivos:

- A palavra "complexa" sugere que as frações contenham números complexos, mas não é o caso.
- Você já sabe como trabalhar com frações complexas. Você só não sabia que você sabe como (mas sabe agora).

Parando de mistério e indo direto ao ponto: uma fração complexa é uma fração que contém uma fração em seu numerador ou em seu denominador (ou em ambos). Deixar respostas finais como frações complexas não é aconselhável, porque elas acabam parecendo complicadas demais, sem necessidade. Felizmente, consertá-las é bastante simples – apenas traduza-as em problemas de divisão e divide-as, como você fez no Exemplo 3.

Fale a Linguagem

Uma **fração complexa** (ou composta) contém frações em seu numerador ou em seu denominador (ou em ambos). É como uma fração de dois andares.

Exemplo 4: Simplifique a fração complexa abaixo.

$$\frac{\frac{3x}{x-2}}{\frac{9x^2}{7x-14}}$$

Solução: Reescreva a fração complexa como um quociente – a fração de cima dividida pela fração de baixo.

$$\frac{3x}{x-2} \div \frac{9x^2}{7x-14}$$

Isso está bastante parecido com o Exemplo 3(b). Uma pequena multiplicação pelo inverso deve funcionar. Não se esqueça de fatorar.

$$\begin{aligned}&\frac{3x}{x-2} \cdot \frac{7x-14}{9x^2}\\ &= \frac{3x}{x-2} \cdot \frac{7(x-2)}{9 \cdot x \cdot x}\\ &= \frac{3 \cdot x \cdot 7 \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot 9 \cdot x \cdot x}\end{aligned}$$

Simplificar a fração.

$$\begin{aligned}&\frac{3 \cdot \cancel{x} \cdot 7 \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot 9 \cdot \cancel{x} \cdot x}\\ &= \frac{3 \cdot 7}{9 \cdot x}\\ &= \frac{21}{9x}\end{aligned}$$

Você ainda não terminou, pois pode simplificar ainda mais a fração: 21 e 9 são divisíveis por 3.

$$\frac{7}{3x}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Simplifique a fração complexa.

$$\frac{\frac{x^2-7x+12}{x+2}}{\frac{x-3}{x^2+4x+4}}$$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Para simplificar expressões racionais, fatore o numerador e o denominador e cancele pares de fatores que aparecem nos dois.
- Você pode apenas adicionar ou subtrair expressões racionais que possuem denominadores comuns.
- Mude os problemas de divisão racional para problemas de multiplicação, calculando o inverso da fração que você está dividindo.
- Frações complexas são apenas quocientes disfarçados.

Capítulo 18

Equações e Inequações Racionais

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Resolver equações que contêm frações
- Simplificar proporções usando a multiplicação em cruz
- Investigando as Variações Diretas e Indiretas
- Resolver inequações racionais

Saber *como* adicionar e multiplicar frações é importante, mas saber *quando* aplicar essas habilidades é igualmente importante. Neste capítulo, frações começam a aparecer em todos os lugares e invadir os conceitos discutidos nos capítulos anteriores. O que você faz quando uma equação contém frações? Como você resolve uma inequação com frações? Como você deve reagir se uma fração entrar em sua casa quando você está dormindo e tentar roubar o seu pote de moedinhas?

Resolvendo Equações Racionais

No mundo da matemática, quando você não gosta de alguma coisa, pode manipular as regras do universo e fazer com que as coisas desapareçam. Por exemplo, a maioria dos matemáticos não gosta de frações. Não é porque eles não as entendam, é só que a necessidade constante de denominadores comuns é chata, então, eles preferem eliminá-las sempre que possível.

A maneira mais fácil de fazer com que as frações em uma equação desapareçam é multiplicar tudo pelo mínimo múltiplo comum (MMC) das frações.

Alerta do Kelley

Multiplicar uma equação por algo que contenha x, ocasionalmente, apresenta algumas soluções falsas, então insira todas as suas respostas de volta na equação original para garantir que elas sejam válidas.

Exemplo 1: Resolva a equação.

$$\frac{1}{x+5}+\frac{x}{x+2}=\frac{2x-1}{x^2+7x+10}$$

Solução: Essa equação contém três expressões racionais; a sua primeira meta é eliminar todas essas frações para a solução da equação ficar mais fácil. Comece fatorando todas as expressões possíveis – neste caso, $x^2 + 7x + 10$ é fatorável.

$$\frac{1}{x+5}+\frac{x}{x+2}=\frac{2x-1}{(x+5)(x+2)}$$

Multiplique os dois lados da equação pelo mínimo múltiplo comum $(x + 5)(x + 2)$ para eliminar as frações. Tecnicamente falando, você irá multiplicar a equação por $\frac{(x+5)(x+2)}{1}$. O 1 no denominador é um lembrete de que você deve multiplicar cada numerador pelo MMC e deixar o denominador igual.

$$\frac{(x+5)(x+2)}{1}\cdot\left[\frac{1}{x+5}+\frac{x}{x+2}\right]=\frac{(x+5)(x+2)}{1}\cdot\left[\frac{2x-1}{(x+5)(x+2)}\right]$$

$$\frac{(x+5)(x+2)}{x+5}+\frac{x(x+5)(x+2)}{x+2}=\frac{(x+5)(x+2)(2x-1)}{(x+5)(x+2)}$$

Simplifique as frações.

$$\frac{\cancel{(x+5)}(x+2)}{\cancel{x+5}}+\frac{x(x+5)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=\frac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+2)}(2x-1)}{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+2)}}$$

Todos os denominadores são iguais a 1, mas não há necessidade de escrever um denominador 1.

$$(x+2)+x(x+5)=(2x-1)$$
$$x+2+x^2+5x=2x-1$$
$$x^2+6x+2=2x-1$$

Defina a equação como igual a 0, ao subtrair $2x$ e adicionar 1 nos dois lados

$$x^2+6x-2x+2+1=0$$
$$x^2+4x+3=0$$

Resolva a equação quadrática pela fatoração.

$$(x+3)(x+1)=0$$
$$x+3=0 \quad \text{or} \quad x+1=0$$
$$x=-3 \qquad\qquad x=-1$$

Insira essas duas soluções de volta na equação original. Se você obtiver afirmações verdadeiras, então essas respostas serão válidas.

Verifique x = −3

$$\frac{1}{x+5}+\frac{x}{x+2}=\frac{2x-1}{x^2+7x+10}$$
$$\frac{1}{-3+5}+\frac{-3}{-3+2}=\frac{2(-3)-1}{(-3)^2+7(-3)+10}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{-3}{-1}=\frac{-6-1}{9-21+10}$$
$$\frac{1}{2}+3=\frac{-7}{-2}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{7}{2}$$

Verdadeiro

Verifique x = −1

$$\frac{1}{x+5}+\frac{x}{x+2}=\frac{2x-1}{x^2+7x+10}$$
$$\frac{1}{-1+5}+\frac{-1}{-1+2}=\frac{2(-1)-1}{(-1)^2+7(-1)+10}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{-1}{1}=\frac{-2-1}{1-7+10}$$
$$\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{3}{4}$$

Verdadeiro

Você Tem Problemas

Problema 1: Resolva a equação $\frac{x+3}{x-8}+\frac{x}{x^2-6x-16}=1$.

Proporções e Multiplicação em Cruz

De todas as equações racionais que você verá como um estudante de álgebra, uma das mais comuns será a *proporção*, uma equação em que duas frações são definidas como iguais uma à outra, assim: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Fale a Linguagem

Uma **proporção** consiste em duas frações definidas como iguais uma à outra. Proporções geralmente são resolvidas usando a **multiplicação em cruz**, multiplicando o numerador da fração pelo denominador de outra e definindo esses produtos como iguais.

Você pode resolver uma proporção (assim como qualquer outra equação racional) se você multiplicá-la pelo mínimo múltiplo comum das frações e simplificar. No entanto, há um ótimo atalho chamado de *multiplicação em cruz*, que funciona exclusivamente para proporções: multiplique cada numerador pelo denominador da outra fração e defina os resultados como iguais, como ilustrado pela Figura 18.1.

Figura 18.1

A multiplicação em cruz elimina os denominadores de uma proporção e não exige que você calcule o menor múltiplo comum.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplo 2: Resolva a equação $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x+6}{2}$.

Solução: Como a equação é uma proporção, multiplique em cruz para eliminar as frações.

$$(x+3) \cdot 2 = (x-1)(x+6)$$
$$2x+6 = x^2+5x-6$$

Isso é uma equação quadrática, então, iguale-a a 0 e tente resolvê-la fatorando.

$$0 = x^2+5x-2x-6-6$$
$$0 = x^2+3x-12$$

Loucura, $x^2 + 3x - 12$ não é fatorável! Então você terá que completar o quadrado ou aplicar a fórmula quadrática (ou de Bhaskara) para obter a solução (eu, geralmente, uso a fórmula quadrática, para que não pareça que a memorizei à toa).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4(1)(-12)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

Ok, esse não foi o problema mais bonito do mundo, mas você reparou que a parte difícil foi resolver a equação quadrática e não lidar com as frações? E ainda tenho notícias melhores: você não precisa testar essas respostas (horrivelmente nojentas e irracionais) ao inseri-las na equação original. Ao contrário da

multiplicação por um mínimo múltiplo comum, a multiplicação em cruz não apresentará falsas soluções.

Você Tem Problemas

Problema 2: Resolva a equação $\frac{3x-2}{x} = \frac{2x}{x+1}$.

Investigando as Variações

Há uma certa ligação inegável de causa-efeito em muitos aspectos da vida. Em alguns casos, um aumento em um evento causa um aumento em outro; por exemplo, quanto mais batatas fritas você come em uma lanchonete, mais a sua cintura aumenta. Outra: quanto mais rápido você dirigir, mais chances você terá de levar uma multa por excesso velocidade.

Por outro lado, há também eventos que são ligados de maneira oposta (ou inversa), ou seja, um aumento em um leva a uma diminuição em outro. Uma vez me disseram que o número de chaves que você carrega em seu trabalho é inversamente relacionado ao quão bem-sucedido você é nele. De acordo com essa teoria, o chefe tem apenas uma ou duas chaves que abrem tudo, mas os operários têm que carregar chaveiros pesados, como em zoológicos. Que tal essa relação inversa: quanto mais bem-sucedido você é na política, menos honesto você é como pessoa (ui, golpe baixo!).

Essas relações descrevem a variação entre dois valores e, nesta seção, você aprenderá a expressá-las matematicamente, usando equações racionais.

Variação Direta

A *variação direta* é como a relação que descrevi anteriormente, em que o aumento em um valor corresponde a um aumento em outro, como na afirmação "Quanto mais você estudar para uma prova, maior será a sua nota". Neste caso, um aumento nas suas horas de estudo deve ser correspondente a um aumento em sua nota na prova.

Fale a Linguagem

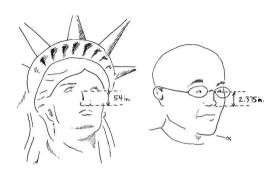
Se as variáveis x e y exibem uma **variação direta**, então y é exatamente k vezes tão grande quanto x; k é chamado de **constante de proporcionalidade**. A variação direta também é chamada de variação proporcional.

Matematicamente falando, se x e y são diretamente variáveis, então y é exatamente k vezes o número x. Logo, $y = k \cdot x$, onde k é um número chamado de constante de proporcionalidade. O valor k na fórmula $y = k \cdot x$ descreve como x e y são

relacionados; então, a sua primeira tarefa em um problema de variação direta é calcular a constante de proporcionalidade. Você faz isso ao dividir os dois valores que são diretamente relacionados. Então, se y é diretamente variável a x, então $\frac{y}{x} = k$. Depois que você achar k, você pode usar essa equação para descobrir qualquer valor faltante.

Exemplo 3: Assuma que as medidas das características faciais da Estátua da Liberdade são diretamente variáveis às medidas do meu rosto. O nariz da estátua tem 137 centímetros de comprimento, enquanto o meu nariz tem (menor comparativamente) 6 centímetros, como ilustrado na Figura 18.2. Se o olho direito da estátua tem 76 centímetros de diâmetro, calcule qual o tamanho do meu olho direito (arredonde os cálculos em milésimos).

Figura 18.2

A estátua da liberdade pode ter um nariz grande, mas o meu também é considerável, e eu não tenho nenhum chapéu pontudo para desviar a atenção dele.

Solução: Divida o comprimento do nariz da estátua pelo tamanho do meu nariz, para determinar a constante de proporcionalidade. Use uma calculadora, a não ser que você esteja animado em dividir manualmente.

$$k = \frac{54}{2.375} \approx 22.737$$

Agora que você sabe o valor de k, pode calcular o tamanho do meu olho usando a equação $\frac{y}{x} = k$. Insira a medida do olho da estátua na mesma variável que você inseriu a medida do nariz dela (y).

$$\frac{30}{x} = 22.737$$

Reescreva 22,833 como $\frac{22.737}{1}$ para criar uma proporção e multiplique em cruz para achar a solução de x.

$$\frac{30}{x} = \frac{22.737}{1}$$
$$30 \cdot 1 = x(22.737)$$
$$\frac{30}{22.737} = x$$

Portanto, meu olho tem aproximadamente 3,33 centímetros de diâmetro. Claro que seria mais fácil eu simplesmente medir meu olho do que calcular com toda essa álgebra, todavia, você não teria acesso imediato ao meu olho, então, a álgebra é a sua única opção. Não vou começar a emprestar meu olho às pessoas, para que elas consigam a resposta mais rapidamente. Como eu teria certeza de que elas iriam me devolvê-lo?

Você Tem Problemas

Problema 3: Assuma que x e y são variavelmente proporcionais. Se $x = 12$ quando $y = 15$, qual é o valor de y quando $x = 35$?

Variação Indireta

A *variação indireta* (ou *inversa*) acontece quando um aumento em uma quantidade leva a uma diminuição em outra. A variação direta e inversa são bastante próximas. Na variação direta, o quociente dos dois valores se mantém constante $\left(\frac{y}{x} = k\right)$, enquanto a variação inversa possui um produto constante ($xy = k$). Mais uma vez, a sua primeira tarefa em um problema de variação (neste caso, inversa) será calcular k e depois usá-lo na equação $xy = k$ para calcular os valores faltantes.

Fale a Linguagem

Se duas quantidades, x e y, exibem **variação indireta** (ou **inversa**), então o seu produto se mantém constante, apesar da mudança nos valores de x e y: $xy = k$. Isso significa que, enquanto uma quantidade cresce pelo fator n, a outra encolhe com o fator $\frac{1}{n}$.

Ponto Crítico

No episódio "HOMR", de **Os Simpsons**, o motivo para a falta de acuidade da inteligência de Homer é revelada (em outras palavras, descobrimos por que ele é tão idiota): há um giz de cera preso em seu cérebro desde a infância. Os médicos o removem e, de repente, ele vira um gênio. No entanto, isso se revela uma faca de dois gumes, porque as pessoas começam a excluir o novo Homer, mais esperto.

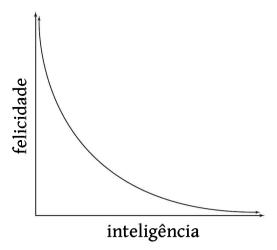
Triste, ele vai conversar com a sua filha superinteligente Lisa, que afirma que um dos seus maiores medos foi concretizado. "Pai, conforme a inteligência aumenta, a felicidade normalmente diminui. Na verdade, eu fiz um gráfico", ela diz, segurando a Figura 18.3. "Eu faço muitos gráficos", ela suspira tristemente.

Esse é o gráfico de uma variação inversa. Repare que conforme x aumenta (e você fica mais esperto), y fica menor (o gráfico chega cada vez mais perto de $y = 0$, o eixo x), significando uma queda na felicidade.

Inversamente, quanto menor for a sua inteligência (quanto mais perto de x é da origem), maior é o gráfico, indicando grande felicidade.

Quem disse que você não aprende nada assistindo televisão? Na verdade, o programa de televisão **Os Simpsons** frequentemente inclui piadas matemáticas. Se você sabe inglês, confira o site da Dra. Sarah J. Greenwald e do Dr. Andrew Nestler que narra essas referências (geralmente sutis), em www.simpsonsmath.com. Site com conteúdo em inglês.

Figura 18.3

Lisa tem más notícias para o seu pai recém-inteligente. Com uma grande inteligência, vem uma grande infelicidade (e vice-versa).

Exemplo 4: Suponha que o número de vezes que Oscar escova os dentes em um ano varia inversamente com o total de cáries que ele terá nesse ano. Em 2011, ele escovou os dentes um total de 48 vezes e teve quatro cáries. Se ele planeja escovar os dentes 140 vezes neste ano, quantas cáries ele deve esperar ter? (Arredonde sua resposta para o número inteiro mais próximo.)

Solução: Vamos definir t como o número total de vezes que Oscar escova os dentes em um ano e c como o número total de cáries desse ano. O problema diz que t e c variam inversamente, então, o produto deles é uma constante: $t \cdot c = k$. Em 2011, $t = 48$ e $c = 4$; substitua esses valores na equação para achar k.

$$48 \cdot 4 = k$$
$$192 = k$$

Agora que você sabe que $k = 192$, é a vez de novos valores de t e c. Neste ano $t = 140$; calcule o valor correspondente de c.

$$t \cdot c = k$$
$$140 \cdot c = 192$$
$$c = \frac{192}{140}$$
$$c \approx 1.371$$

Arredonde a sua resposta para o número inteiro mais próximo: $c = 1$. Oscar deve esperar ter apenas uma cárie neste ano.

Você Tem Problemas

Problema 4: Assuma que x seja inversamente variável a y. Se $x = 9$ quando $y = 75$, qual é o valor de x quando $y = 2$?

Resolvendo Inequações Racionais

Revise a última seção do Capítulo 13 por um momento. Em resumo, este é o processo: fatore a expressão, ache os números críticos, divida a reta numérica em intervalos baseados nestes números críticos e teste os intervalos para determinar quais são as soluções da inequação.

Você usará um processo bastante parecido para resolver inequações racionais. Na verdade, para ser completamente honesto, o processo é *exatamente* o mesmo. O Capítulo 13 define um número crítico como um valor x que faz uma expressão ser igual a 0 ou faz com que ela seja indefinida. Antigamente, no entanto, nada fazia com que as expressões fossem indefinidas. Agora que as frações entraram em

cena, as coisas mudarão um pouco. Valores que fazem um denominador de uma fração ser igual a 0, também fazem com que a função seja indefinida.

Se você seguir esses passos, resolver inequações racionais será moleza:

1. **Reorganize a inequação para que apenas o zero fique no lado direito.** Isso significa que você deve adicionar ou subtrair para mover todos os termos do lado direito para o esquerdo.
2. **Crie uma fração no lado esquerdo da inequação.** Use denominadores comuns para combinar múltiplos termos em uma única fração.
3. **Fatore o numerador e o denominador, se possível.** Achar os números críticos assim fica extremamente fácil.
4. **Defina cada fator do numerador como igual a zero e resolva.** Marque esses números críticos na reta numérica usando um ponto aberto (se o símbolo de inequação for $<$ ou $>$) ou um ponto fechado (se o símbolo de inequação for $\leq$ ou $\geq$).
5. **Defina cada fator do denominador como igual a zero e resolva.** As soluções também são números críticos e sempre devem ser marcadas na reta numérica com um ponto aberto, porque zeros no denominador fazem com que a fração seja indefinida (lembre-se de que você não pode dividir por zero).
6. **Escolha pontos testes para identificar os intervalos da solução.** Os números críticos dividem a reta numérica em intervalos. Escolha um ponto teste de cada intervalo para inserir na inequação. Afirmativas verdadeiras da inequação indicam que o intervalo é parte da solução.

Seja muito cuidadoso com os pontos que você situa na reta numérica. Se usar o ponto errado, você obterá os sinais da inequação errados na resposta e o gráfico será impreciso.

Exemplo 5: Resolva a inequação $\frac{2x+5}{x+4} \geq -x$ e desenhe a solução.

Solução: Comece movendo $-x$ para o lado esquerdo da inequação ao adicionar x aos dois lados – o lado direito deve conter apenas um zero.

$$\frac{2x+5}{x+4} + x \geq 0$$

Combine os termos do lado esquerdo da inequação em uma única fração. O mínimo múltiplo comum de $\frac{2x+5}{x+4}$ e $\frac{x}{1}$ é $x + 4$, então multiplique o numerador e o denominador de $\frac{x}{1}$ pelo MMC e combine as frações.

$$\frac{2x+5}{x+4}+\left(\frac{x+4}{x+4}\right)\cdot\frac{x}{1}\geq 0$$

$$\frac{2x+5}{x+4}+\frac{x^2+4x}{x+4}\geq 0$$

$$\frac{2x+5+x^2+4x}{x+4}\geq 0$$

$$\frac{x^2+6x+5}{x+4}\geq 0$$

Fatore o numerador.

$$\frac{(x+1)(x+5)}{x+4}\geq 0$$

Defina cada fator do numerador como igual a 0 e resolva para obter os dois números críticos.

$$x+1=0 \quad \text{ou} \quad x+5=0$$
$$x=-1 \qquad\qquad x=-5$$

Marque $x = -1$ e $x = -5$ na reta numérica usando pontos sólidos, como ilustrado pela Figura 18.4. Gere o número crítico final ao definir o denominador como igual a 0.

$$x+4=0$$
$$x=-4$$

Todos os números críticos que vêm do denominador são marcados com pontos abertos, como você pode observar na Figura 18.4.

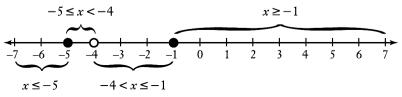



Figura 18.4

Os números críticos $x = -5$, -4 e -1 dividem a reta numérica em quatro intervalos.

Escolha pontos testes de cada intervalo (eu sugiro $x = -6$, $x = -4{,}5$, $x = -2$ e $x = 0$) e insira-os na inequação. Use a versão fatorada, com uma única fração da inequação, para facilitar as coisas para você.

Teste x = –6

$$\frac{(x+1)(x+5)}{x+4} \geq 0$$
$$\frac{(-6+1)(-6+5)}{-6+4} \geq 0$$
$$\frac{(-5)(-1)}{-2} \geq 0$$
$$-\frac{5}{2} \geq 0$$

Falso

Teste x = –45

$$\frac{(x+1)(x+5)}{x+4} \geq 0$$
$$\frac{(-4.5+1)(-4.5+5)}{-4.5+4} \geq 0$$
$$\frac{(-3.5)(0.5)}{-0.5} \geq 0$$
$$3.5 \geq 0$$

Verdadeiro

Teste x = –2

$$\frac{(x+1)(x+5)}{x+4} \geq 0$$
$$\frac{(-2+1)(-2+5)}{-2+4} \geq 0$$
$$\frac{(-1)(3)}{2} \geq 0$$
$$-\frac{3}{2} \geq 0$$

Falso

Teste x = 0

$$\frac{(x+1)(x+5)}{x+4} \geq 0$$
$$\frac{(0+1)(0+5)}{0+4} \geq 0$$
$$\frac{(1)(5)}{4} \geq 0$$
$$\frac{5}{4} \geq 0$$

Verdadeiro

Os valores de teste $x = -4{,}5$ e $x = 0$ fazem com que a inequação seja verdadeira-então, a solução da inequação é feita dos intervalos que os contenham: $-5 \leq x < -4$ ou $x \geq -1$. Escureça esses intervalos na reta numérica para criar o gráfico, como ilustrado na Figura 18.5.

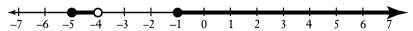



Figura 18.5

O gráfico da solução de $\frac{2x+5}{x+4} \geq -x$.

Você Tem Problemas

Problema 5: Resolva a inequação $\frac{x+7}{x-2} < 3$ e desenhe seu gráfico.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Multiplicar todos os termos em uma equação racional pelo menor múltiplo comum elimina as frações.
- A multiplicação em cruz elimina as frações em uma proporção.
- Se x é diretamente variável a y, então $\frac{y}{x} = k$; se x é inversamente variável a y, então $xy = k$.
- Números críticos são valores que fazem com que uma expressão seja igual a zero ou indefinida.

Parte 7 Finalizando as Coisas

Nenhum livro de álgebra é completo sem um capítulo sobre problemas. Seria como ir ao dentista sem fazer uma limpeza, ou ir ao oftalmologista sem fazer um teste de detecção de glaucoma, onde uma rajada de vento é disparada em direção ao seu globo ocular. Problemas são um mal necessário da álgebra, e existem para mostrar a você que podemos usar álgebra na "vida real". Depois que você encarar com firmeza os problemas, achará uma revisão abrangente de todas as habilidades e de todos os conceitos discutidos neste livro, para que você possa praticar todo o seu conteúdo.

Capítulo 19

Dominando Problemas

Neste Capítulo, você aprenderá a:

- Calcular juros simples e compostos
- Resolver problemas de medidas geométricas
- Determinar a distância e a velocidade de viagem
- Solucionar problemas com combinações e misturas

Na Mitologia Grega, os deuses distribuíam castigos muito criativos. Pegue, por exemplo, o destino extraordinariamente desagradável de Sísifo. O cara não era nenhum santo, era um rei cruel e sem coração, e muito astuto. Quando a Morte, na forma de Hades, veio buscá-lo, ele conseguiu algemá-la e mantê-la como prisioneira. Eventualmente, as pessoas começaram a perceber que ninguém estava morrendo ("Ei Gary, desculpa por ter te atropelado com a minha carruagem essa manhã – eu estava trocando de estação de rádio. Sem querer te ofender, mas você não fica nada bem decapitado"), então, a sorte de Sísifo acabou.

Como castigo para o ousado sequestro, ele foi condenado a rolar uma grande pedra até o alto de um monte íngreme na terra dos mortos por toda a eternidade. Isso é bem ruim, mas não é a pior parte. Depois de horas e horas de trabalho pesado, movendo devagar o enorme rochedo, subindo numa velocidade

agonizantemente lenta e torcendo cada músculo de seu corpo, um pouco antes de chegar ao ápice do precipício e completar a sua tarefa, a pedra rolaria de volta ao início do morro. Hora de começar novamente.

Não consigo imaginar um destino tão deprimente: passar toda a eternidade forçado a fazer algo inerentemente doloroso e sem sentido, sabendo que não importa o quanto você tentar, você nunca conseguirá cumprir a sua tarefa. Porém, milhares de alunos, todos os dias, envolvem-se em batalhas diárias como a de Sísifo. Toda manhã, eles caminham até o monte gigante, que é a álgebra, e até uma enorme rocha, que são os problemas.

Apesar de eles não estarem condenados a trabalharem com problemas sem sucesso para toda a eternidade, falta neles uma coisa que Sísifo tinha: direção. Pelo menos, ele sabia *o que tinha que ser feito*. Vejo muitos alunos que encararam de boca aberta esses problemas, com olhos enormes e brilhantes, úmidos, com lágrimas não derramadas, que sempre dizem a mesma coisa: "Eu não sei nem como começar! Como vou resolver esses problemas se não sei nem qual é o primeiro passo?" (claro que há alguns palavrões quando eles *dizem isso*, mas você entendeu o que eu quis dizer).

Neste capítulo, vou me arriscar em atrair a ira das divindades algébricas mitológicas e libertá-lo do seu destino. Apresentarei quatro dos tipos mais comuns de problemas e fornecerei um plano de ataque para cada um. Dessa maneira, ao invés de viver com medo, você poderá encarar esses problemas calmamente e responder (com uma voz cômica de um herói de ação do cinema): "Vamos lá!" Você se sentirá como um rochedo (trocadilho horrível da minha parte).

Problemas com Juros

Há três bons motivos para depositar suas economias em uma conta bancária, em vez de escondê-las em seu armário ou embaixo do colchão:

1. Um banco é mais seguro e, se o seu dinheiro for roubado, geralmente, há leis federais que asseguram o seu investimento.
2. Um banco fornece a oportunidade única de escrever com canetas presas em mesas. Apesar de seus investimentos permitirem que bancos nadem em dinheiro, por alguma razão, eles fazem questão que você não roube suas canetas acidentalmente.
3. Seu dinheiro recebe juros mesmo que você não faça esforço algum.

Juros são excelentes. É dinheiro de graça, que você recebe por apenas deixar o seu dinheiro em um lugar seguro. Podem pedir para que você resolva problemas nos

quais tenha que calcular os juros recebidos em algum investimento inicial (que é chamado de principal) após um certo período de tempo. Há dois grandes tipos de problemas com juros que você deve resolver: juros simples e juros compostos.

Fale a Linguagem

A quantia de dinheiro que você deposita inicialmente é chamada de **principal**.

Juros Simples

Se o seu dinheiro aumenta com juros simples, você está basicamente ganhando uma pequena porcentagem do seu investimento inicial a cada ano como juros. Por exemplo, se o principal de uma conta é R$100 e a sua taxa de juros anual é 6,75%, no final de cada ano, você ganhará um adicional de R$6,75 (já que R$6,75 é 6,75% de R$100).

Ponto Crítico

Para converter uma porcentagem em um decimal, mova a vírgula decimal duas casas à esquerda. Por exemplo, o decimal equivalente de 6,75% é 0,0675. Reciprocamente, para mudar um decimal em uma porcentagem, mova o decimal duas casas à direita. Isso significa que 0,45 = 45%.

A má notícia é que, apesar de a conta crescer um pouco a cada ano, você só receberá juros em cima do investimento inicial, não importando há quanto tempo você tenha uma conta bancária ativa ou quanto de juros esse dinheiro acumulou.

A fórmula para calcular juros simples é $i = prt$, onde p é o principal, r é a taxa de juros anual (expressa como um decimal) e i são os juros que você ganhou depois que o dinheiro foi investido em t anos.

Exemplo 1: Você era uma criança bastante racional e econômica. Ao invés de gastar o seu dinheiro da fada do dente, você o investiu, depositando R$32,00 em uma conta bancária, com uma taxa de juros anual fixa de 7,75%. Qual é o saldo da conta 30 anos depois?

Solução: para calcular o equilíbrio, será necessário adicionar os juros ganhos à quantia principal. É claro que você ainda precisará descobrir qual o valor desses juros. Use a fórmula $i = prt$, onde $p = 32$, $r = 0.0775$ (o valor decimal equivalente de 7,75%) e $t = 30$.

$$\begin{aligned} i &= prt \\ &= (32)(0.0775)(30) \\ &= \$74.40 \end{aligned}$$

Você ganhou R$74,40 em juros nesse período de 30 anos, então, adicione essa quantia ao investimento inicial para calcular o saldo da conta.

$$\begin{aligned}\text{Saldo} &= \text{principal} + \text{juros recebidos}\\ &= \$32 + \$74.40\\ &= \$106.40\end{aligned}$$

Juros Compostos

A maior parte dos bancos não trabalha com juros simples; quanto mais dinheiro você deposita, mais dinheiro você pode ganhar, então, eles querem encorajá-lo a depositar o máximo possível. Uma maneira de eles fazerem isso é através de *juros compostos*, com que você ganha dinheiro baseado em seu principal original *e* nos juros acumulados.

Vamos dizer que você deposita R$100 em sua conta, em que o juro é composto anualmente à taxa de 6,0%. No final do primeiro ano, você terá um saldo de R$106, assim como você teria com juros simples. No entanto, no final do segundo ano, você ganhará mais 6,0% de juros sobre o novo saldo de R$106, e não sobre o saldo original de R$100.

Fale a Linguagem

Se a sua conta bancária acumula **juros compostos**, então você ganha juros baseados no seu saldo inteiro, ao invés de apenas no investimento inicial.

Ponto Crítico

Quanto mais vezes os juros em sua conta forem compostos, mais dinheiro você ganhará. O melhor cenário possível seria de juros compostos continuamente, ou seja, são compostos um número infinito de vezes a cada ano. Isso é meio complicado, então você terá que esperar aulas de pré-cálculo para saber como isso funciona.

Os juros da maioria das contas bancárias são compostos mais de uma vez ao ano. Se eles são compostos semanalmente (52 vezes ao ano), mensalmente (12 vezes ao ano) ou trimestralmente (4 vezes ao ano) pode fazer uma diferença considerável no seu saldo.

A fórmula dos juros compostos é um pouco mais complicada que a fórmula dos juros simples:

$$b = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Nesta fórmula, p é mais uma vez o investimento principal, r é a taxa de juros anual na forma decimal e t é o período de tempo que o dinheiro está investido. Há duas variáveis novas: n, o número de vezes que os juros são compostos em um ano, e b, o saldo da conta.

Exemplo 2: Quanto você ganharia em dinheiro em um período de 18 meses ao investir R$3.000 em uma conta bancária com uma taxa de juros anual de 6,25%,

que é composta mensalmente? E quanto ganharia se a taxa fosse composta trimestralmente? E qual será a diferença de ganhos entre um período e outro? (Para manter as respostas consistentes, arredonde todos os decimais a sete casas decimais enquanto você calcula.)

Solução: Você terá que calcular dois saldos diferentes, um com $n = 12$, para compostos mensais, e um com $n = 12$ para juros compostos trimestrais. As outras variáveis serão iguais nos dois problemas; $p = 3.000$, $r = 0{,}0635$, e $t = 1{,}5$. Preste atenção, a variável t é medida em anos, e não meses. Já que 18 meses é exatamente igual a um ano e meio, $n = 12$.

Calculo o saldo sendo $n = 12$.

$$\begin{aligned} b &= 3{,}000\left(1+\frac{0.0625}{12}\right)^{(12)(1.5)} \\ &= 3{,}000(1+0.0052083)^{18} \\ &= 3{,}000(1.0980173) \\ &= 3{,}294.0519 \end{aligned}$$

Arredonde a sua resposta para os centavos mais próximos (duas casas decimais): R$3.294,05. Agora calcule o $n = 4$.

$$\begin{aligned} b &= 3{,}000\left(1+\frac{0.0625}{4}\right)^{(4)(1.5)} \\ &= 3{,}000(1+0.015625)^{6} \\ &= 3{,}000(1.0974893) \\ &= 3{,}292.47 \end{aligned}$$

Subtraia os dois saldos para achar a diferença total: R$3.294,05 – R$3.292,47 = R$1,58. Claro que R$1,58 não é uma grande diferença, mas, quanto maior o principal e quanto mais tempo você investir, maior será essa diferença.

Alerta do Kelley

Repare que a fórmula de juros compostos dá o saldo total, enquanto a fórmula de juros simples dá os juros – você tem que adicionar o principal aos juros no Exemplo 1 para poder calcular o saldo.

Alerta do Kelley

Em ambos os problemas, de juros simples e compostos, t deve ser medido em anos. Portanto, você deve definir $t = 2$ (e não $t = 24$) em um investimento de 24 meses.

Você Tem Problemas

Problema 1: Calcule o saldo de uma conta cujo investimento principal é de R$5.000,00 e as características são as seguintes:

a. Juros simples a uma taxa anual de 8,25%, por 20 anos.
b. Juros compostos semanalmente a uma taxa anual de 8,25%, por 20 anos.

Arredonde todos os cálculos para sete casas decimais.

Problemas de Área e Volume

Professores de álgebra amam fractais. Acho que nunca conheci um professor de matemática que não tivesse um pôster de um fractal orgulhosamente pendurado em sua sala de aula, seu escritório ou dobrado e guardado na carteira (caso você não saiba, fractais são formas geométricas que possuem a mesma aparência em qualquer ampliação – elas têm o mesmo formato, não importa o quanto você aumente ou diminua o *zoom*). Professores de álgebra amam tanto formas geométricas que, na verdade, geralmente fazem perguntas sobre elas antes que você tenha uma aula de geometria. Não fique surpreso se os seus problemas façam referências aos seguintes conceitos geométricos:

- **Área:** A quantidade de espaço ocupada por um objeto bidimensional; a quantidade de carpete que você precisa para cobrir um chão representa a área do chão.
- **Perímetro**: A distância ao redor de um objeto bidimensional; a quantidade de cerca que você precisa para cercar o seu quintal é igual ao perímetro do seu quintal (o perímetro de um objeto circular é chamado de circunferência).
- **Volume**: A quantidade de um espaço tridimensional dentro de um objeto; a quantidade de líquido dentro de uma lata de alumínio pode representar o volume da lata.
- **Área da Superfície**: Mede a quantidade de "pele" necessária para cobrir um objeto tridimensional, sem contar a sua espessura; a quantidade de couro usada para cobrir uma bola de futebol representa a área da superfície da bola.

Há muitas fórmulas geométricas, a maioria você aprenderá nas aulas de geometria, mas você deve se familiarizar com as fórmulas na Tabela 19.1.

Tabela 19.1 Fórmulas Geométricas Básicas

Descrição	Fórmula	Variáveis
Área de um retângulo	$A = l \cdot w$	c = comprimento, l = largura
Perímetro de um retângulo	$P = 2l + 2w$	c = comprimento, l = largura
Área de um círculo	$A = \pi r^2$	r = raio
Circunferência de um círculo	$C = 2\pi r$	r = raio
Volume de um sólido retangular	$V = l \cdot w \cdot h$	c = comprimento, l = largura, a = altura
Volume de um cilindro	$V = \pi r^2 h$	r = raio, h = altura
Área da superfície de um cubo	$S = 6l^2$	c = comprimento do lado

Se você sabe as fórmulas corretas, problemas geométricos são bastante simples.

Exemplo 3: (Inspirado no filme "Férias Frustradas de Natal") Tio Eddie está nervoso em andar de trenó com Clark W. Griswold, por causa da placa de metal retangular em sua cabeça (por causa disso, toda vez que a sua mulher usa o microondas, ele esquece quem ele é por meia hora). Durante a operação para o implante da placa, antes da anestesia fazer efeito, Eddie se lembra de ter escutado o médico falar que a largura da sua placa é 3 centímetros menor que o seu comprimento. Se a área da placa é 54 cm², encontre as suas dimensões.

Solução: Você não sabe absolutamente nada a respeito do comprimento do retângulo, mas sabe que a largura da placa é 3 centímetros menor que o comprimento; então, escreva essa expressão algebricamente: $l = c - 3$. A fórmula para a área do retângulo é $A = c \cdot l$. Substitua $A = 54$ e $l = c - 3$ na fórmula.

$$A = l \cdot w$$
$$54 = l(l-3)$$
$$54 = l^2 - 3l$$

Defina a equação quadrática como igual a 0 e resolva-a através da fatoração.

$$0 = l^2 - 3l - 54$$
$$0 = (l-9)(l+6)$$
$$l - 9 = 0 \quad \text{ou} \quad l + 6 = 0$$
$$l = 9 \qquad\qquad l = -6$$

Uma dessas respostas não faz sentido. O comprimento de um objeto sempre deve ser positivo; então, jogue fora $l = -6$. Portanto, o comprimento do retângulo deve ser de 9 cm. Lembre-se de que $l = c - 3$; substitua $c = 9$ na equação para determinar a largura do retângulo.

$$w = l - 3 = 9 - 3 = 6 \text{ cm}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: A altura de um certo cilindro é exatamente duas vezes maior que o seu raio. Se o volume do cilindro é 36π cm³, qual é o raio do cilindro?

Problemas de Velocidade e Distância

Você já escutou um problema assim: "O trem A segue para o norte a uma velocidade média de 153 quilômetros por hora, deixando a estação no exato momento que outro trem, o Trem B, deixa outra estação, em direção ao sul, a uma velocidade média de 177 quilômetros por hora. Se esses trens são postos sem querer no mesmo trilho e começam com uma diferença de 2092 quilômetros de distância, quanto tempo demora até eles colidirem?".

Se esse problema parece familiar é porque, provavelmente, você assiste muita televisão (como eu). Sempre que programas de televisão mencionam matemática, geralmente é no contexto de um personagem principal tentando (e falhando) resolver o clássico "problema impossível do trem". Não tenho ideia do porquê disso, mas, vira e mexe, esse problema é destacado como o motivo das pessoas odiarem tanto matemática.

Surpreendentemente, esse problema não é tão difícil. Como a maioria dos problemas de distância e velocidade de viagem, ele exige apenas uma fórmula simples: $D = r \cdot t$. A distância viajada é igual à velocidade (v) multiplicada pelo tempo (t) que viajou nessa velocidade. O que dificulta os problemas de distância e velocidade é que, geralmente, temos duas coisas viajando de uma só vez, então, você precisa usar a fórmula duas vezes ao mesmo tempo. Neste problema, você a usará uma vez para o Trem A e uma vez para o Trem B.

Para deixar as coisas claras em sua cabeça, você deve usar algumas pequenas descrições. Por exemplo, usa a fórmula $D_A = r_A \cdot t_A$ para a distância, a velocidade e os valores de tempo do Trem A; e a fórmula $D_B = r_B \cdot t_B$ para o Trem B.

Exemplo 4: O Trem A segue para o norte a uma velocidade média de 153 quilômetros por hora, deixando a sua estação no mesmo momento que outro trem; o Trem B, deixa uma estação diferente, em direção ao sul a uma velocidade média de 177 quilômetros por hora. Se esses trens são postos sem querer na mesma trilha e começam com uma diferença de 2092 quilômetros de distância, quanto tempo demora até eles colidirem?

Solução: Dois trens significam duas fórmulas de distância: $D_A = r_A \cdot t_A$ e $D_B = r_B \cdot t_B$. Sua primeira meta é inserir qualquer valor que possa extrair do problema. O Trem A viaja a 153km/h, então $r_A = 95$; similarmente, $v_B = 110$.

O problema indica que os trens partem ao mesmo tempo, o que significa que o tempo de viagem deles é exatamente o mesmo. Portanto, ao invés de escrever o tempo inicial de viagem deles como t_A e t_B (que sugere que eles são diferentes), escreva os dois como t (que sugere que eles são iguais). Até agora, as duas fórmulas de distância estão assim:

$$D_A = r_A \cdot t_A \qquad D_B = r_B \cdot t_B$$
$$D_A = 95t \qquad D_B = 110t$$

Este é o passo complicado: os trens estão indo na direção um do outro em uma pista que tem 2092 quilômetros. Portanto, eles irão colidir quando, juntos, viajarem um total de 2092 quilômetros. Porque o Trem B está viajando mais rápido, ele também irá além do que o Trem A, mas isso não importa. Tudo que importa é quando $D_A + D_B = 1{,}300$. Felizmente, você sabe quanto são D_A e D_B (153t e 177t, respectivamente), então, insira-os na equação e resolva.

$$D_A + D_B = 1{,}300$$
$$95t + 110t = 1{,}300$$
$$205t = 1{,}300$$
$$t = \frac{1{,}300}{205}$$
$$t \approx 6.341$$

Os trens colidirão em aproximadamente 6,33 horas. Os vagões restaurantes estarão indisponíveis nesse momento.

Alerta do Kelley

Apesar de você ter adicionado D_A e D_B no Exemplo 4, você nem sempre fará isso – depende de como o problema é escrito. No Problema 3, por exemplo, você não calcula uma soma.

Você Tem Problemas

Problema 3: Dave andou da sua casa até a loja de conveniências de bicicleta a uma velocidade de 27 km/h, e o trajeto durou 1,25 horas. Porém, quando ele parou na loja, ele passou por cima de uns pedaços de vidro e acabou furando o seu pneu. Graças à sua má sorte, ele teve que ir empurrando a sua bicicleta até em casa a uma velocidade média de 5 km/h. Quanto tempo, em horas, demorou esse trajeto para casa? Arredonde a sua reposta para duas casas decimais.

Problemas de Mistura e Combinação

O último tipo de problema envolve misturar duas ou mais coisas. O que está sendo misturado não importa, porque o processo é o mesmo, não importando quais são os ingredientes.

O seu trabalho será multiplicar a quantia de cada ingrediente individual por uma quantia que o descreva, como a sua concentração ou o seu peso, e, depois, adicionar esses produtos, assim:

[ingrediente 1] · [o seu valor] + [ingrediente 2] · [o seu valor] = [quantia total] · [o seu valor]

Como os ingredientes individuais, a quantia total é multiplicada pelo seu valor descritivo.

Alerta do Kelley

Se o valor descritivo de um ingrediente é uma porcentagem, converta-o a um decimal para a equação da mistura.

Exemplo 5: Um saco de 2,25 quilos de mistura de cereais possui 20% de passas. O conteúdo do saco é misturado com um saco de 1,4 quilos de uma mistura de cereais que possui 10% de passas. Qual porcentagem da mistura final é de passas?

Solução: Vamos ser honestos. Se você não estivesse em uma aula de álgebra, a resposta certa para essa questão seria "Quem se importa? Eu nem gosto de passas", mas isso não dará a você nenhum ponto extra na prova e fará com que o professor fique meio bravo.

Vamos deixar o saco de 2,25 quilos ser o ingrediente 1; o seu valor descritivo é a porcentagem de passas expressa como um decimal: 20% = 0,20. O ingrediente 2 é o saco de 1,4 quilos, e o seu valor descritivo é 10% = 0,10. O total do peso combinado dos dois sacos de mistura de cereais é 2,25 + 1,4 = 3,65 quilos, mas você não sabe o peso das passas na mistura final, então, vamos deixar que seja igual a x. Crie a equação da mistura usando esses valores e ache a solução de x.

$$\begin{aligned} 5(0.20)+3(0.10) &= 8(x) \\ 1+0.3 &= 8x \\ 1.3 &= 8x \\ \frac{1.3}{8} &= x \\ 0.1625 &= x \end{aligned}$$

Converta o decimal em uma porcentagem ao mover a vírgula decimal duas casas à direita: x = 16.25%. O saco gigante e pouco apetitoso de 3,65 quilos de mistura de cereais possui 16,16% de passas em seu total. Espero que você esteja com fome.

Você Tem Problemas

Problema 4: Um aquário de 37,85 litros contém 26,5 litros de água com uma concentração salina de 1,2%. Qual deve ser a concentração salina dos 11,36 litros de água para encher o tanque e atingir uma concentração salina total de 2%? Arredonde a porcentagem para duas casas decimais.

O Mínimo Que Você Precisa Saber

- Juros compostos permitem que você ganhe dinheiro baseado no principal e nos juros acumulados, enquanto juros simples rendem apenas em cima do principal.
- Problemas geométricos exigem que você use álgebra para calcular a área, o perímetro, o volume ou a superfície da área.
- A distância percorrida é igual à velocidade multiplicada pelo tempo de viagem.
- Em problemas de mistura, você multiplica a quantia de cada ingrediente por algum valor descritivo, como a sua concentração.

Capítulo 20

Teste Final

Neste Capítulo, você poderá:

- Medir o seu conhecimento em todos os tópicos principais de álgebra
- Praticar suas habilidades
- Determinar o que você precisa praticar mais

Nada ajuda você a entender tanto álgebra como a boa e velha prática, e esse é o propósito deste capítulo. Você pode usá-lo como quiser, mas sugiro uma das seguintes estratégias:

Ao terminar de ler cada capítulo, pule para cá e trabalhe nos problemas práticos desse capítulo.

1. Se você está usando este livro como uma espécie de atualização para uma aula de álgebra que você já teve, complete este capítulo antes de começar a ler o livro. Então volte e comece a trabalhar os capítulos cujos problemas você teve dificuldades.
2. Guarde este capítulo para o final e use-o para ver quantos tópicos você já domina após terminar de ler este livro.

Estes problemas são apenas para serem praticados, e não para ensinar os conceitos. Então, apenas as respostas serão dadas no final do capítulo, sem explicações ou justificativas (ao contrário dos quadrinhos de exemplos "Você Tem Problemas", espalhados pelo livro). No entanto, estes problemas práticos são criados para projetar esses exemplos, então, olhe os problemas práticos nos capítulos caso você tenha esquecido alguma coisa.

Você está preparado? Há muitos exercícios a serem feitos. Alguns dos problemas a seguir possuem várias partes, então, há mais de 110 problemas práticos aqui! Não se preocupe – ninguém disse que você tem que fazer todos de uma vez só.

Capítulo 1

1. Identifique todas as categorias às quais o número $0.6\overline{21}$ (ou 0,621212121...) pertence.

2. Simplifique $2 + (-3) - (-5) - (+7) + (+1)$.

3. Simplifique:

   a. $6 \times (-5)$

   b. $-14 \div (-2)$

4. Simplifique:

   a. $4 + [3 - (8 + 2)]$

   b. $|6 - 2(5 + 4)|$

5. Nomeie as propriedades matemáticas que garantem que cada uma das afirmações abaixo seja verdadeira.

   a. $3 + (1 + 4) = (3 + 1) + 4$

   b. $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

   c. $-8 + 0 = -8$

   d. $2 \times 3 \times 5 = 3 \times 5 \times 2$

Capítulo 2

6. Simplifique a fração $\frac{40}{64}$.

7. Reescreva as frações de modo que elas contenham o menor denominador comum: $\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}$

8. Simplifique

   a. $\frac{2}{5}+\frac{7}{3}-\frac{1}{2}$

   b. $\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}$

   c. $\frac{6}{5}\div\frac{1}{3}$

Capítulo 3

9. Traduza as seguintes afirmações em expressões matemáticas.

   a. Um número menos dezessete.

   b. O produto de um número com três vezes esse número mais um.

10. Calcule as expressões

    a. $(-2)^3$

    b. 5^4

11. Simplifique a expressão $\left(\frac{x^3y^{-2}}{x^{-1}}\right)^4$.

12. Escreva os números em notação científica

    a. 0,00000679

    b. 23,400,000,000,000,000,000,000,000

13. Aplique a propriedade distributiva: $-3x(4x^5 + 7x - 9)$.

14. Simplifique a expressão: $10 - (12 - 4 \times 2)^2$.

15. Calcule a expressão $3x(xy - y^2)$ se $x = 2$ e $y = -3$.

Capítulo 4

16. Resolva as equações

    a. $3 + w = 12$

    b. $-\frac{7}{5}x=\frac{2}{15}$

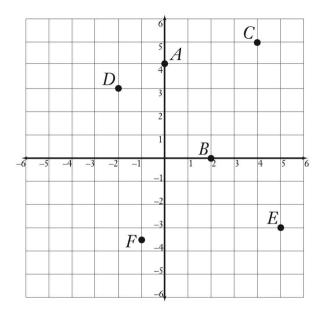
c. $7y - 19 = 2y - 4$

d. $4(x - 5) + 8 = -28$

e. $2|x-3|+5=13$

17. Resolva a equação $5x - 4y = 20$, para achar o valor de y.

Capítulo 5

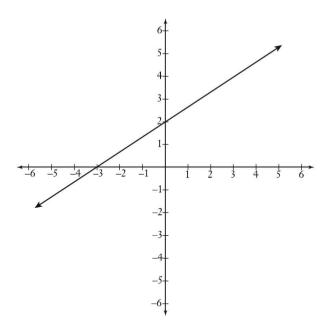
18. Identifique os pontos indicados no plano de coordenadas abaixo.

19. Quais são as coordenadas dos interceptores da equação linear $4x - 3y = 8$?

20. Qual das equações abaixo corresponde ao gráfico a seguir?

a. $2x + 3y = 6$

b. $-2x + 3y = 6$

c. $2x - 3y = 6$

d. $2x + 3y = -6$

21. Calcule a inclinação da reta que passa entre os pontos (4,3) e (−9,2).

22. Qual par de coordenadas representa o vértice do gráfico da equação $y = -|x-4| - 5$?

Capítulo 6

23. Determine a equação da reta com a inclinação $m = -\frac{2}{3}$ que passa entre o ponto (−1,2), e a escreva na forma padrão.

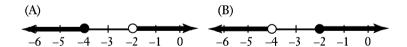
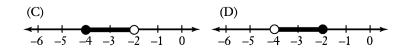
24. Determine a inclinação e o interceptor *y* da reta com a equação $5x - 3y = -9$.

25. Escreva a equação da reta que passa entre os pontos (−3,7) e (4,1), na forma padrão.

26. Escreva a equação da reta *m* na forma padrão se *m* passa entre o ponto (7,0) e é perpendicular à reta $2x + y = -6$.

Capítulo 7

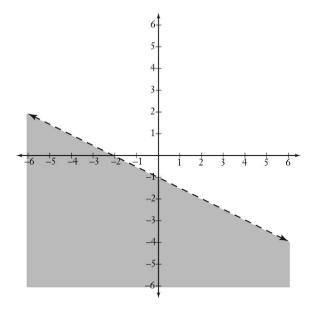
27. Resolva a inequação $14 - 3(y + 5) > 8$.

28. Qual das opções abaixo é o gráfico da inequação $-3 < 2x + 5 \leq 1$?

29. Resolva as inequações.

    a. $|2x - 1| > 0$

    b. $|x + 4| \leq 2$

30. Escreva a equação da inequação desenhada abaixo na forma padrão.

Capítulo 8

31. Resolva o sistema, fazendo o gráfico das equações.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$$

32. Resolva o sistema usando a substituição.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

33. Resolva o sistema usando a eliminação.

$$\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -2x + 15y = 6 \end{cases}$$

34. Escreva a solução do sistema de equações.

$$\begin{cases} x - 3y = -4 \\ 3x - 9y = -11 \end{cases}$$

35. Desenhe a solução do sistema de inequações.

$$\begin{cases} y \leq 4x - 3 \\ y > -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

Capítulo 9

36. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$, calcule $2A - B$.

37. Calcule $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & -6 \\ -8 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

38. Calcule os determinantes.

a. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

39. Use a Regra de Cramer para resolver o sistema de equações.

$$\begin{cases} 9x + 2y = 7 \\ 36x - 3y = -16 \end{cases}$$

Capítulo 10

40. Classifique os polinômios.

    a. $-7x^4 - 9$

    b. $19x^3$

41. Simplifique a expressão $3x^2(2xy + 8x - 3y) - 2xy(y^3 + 2x^2 - 7x)$.

42. Calcule os produtos e simplifique.

    a. $(2x^2y - 3\,xy^3)(xy + 7\,y^3)$

    b. $(x - 3y)(x^2 + 2xy - y^2)$

43. Calcule os quocientes.

    a. $(x^4 + 3x^3 - x + 5) \div (x^2 - 2x + 1)$

    b. $(x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 26x + 17) \div (x - 5)$

Capítulo 11

44. Fatore os polinômios.

    a. $12x^3y - 6x^2y^2 + 9x^5y^3$

    b. $12x + 18x - 10xy - 15y$

    c. $16x^2 - 1$

    d. $x^3 - 8$

    e. $x^2 + 9x - 36$

    f. $6x^2 - 17x - 3$

Capítulo 12

45. Simplifique os radicais.

    a. $\sqrt[3]{-27x^{10}y^8}$

    b. $\sqrt{75x^2y^3}$

46. Reescreva a expressão $8^{7/3}$ como um inteiro.

47. Simplifique as expressões radicais, racionalizando quando necessário.

 a. $\sqrt{12x} - \sqrt{48x}$

 b. $\left(\sqrt[3]{9x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{6x^2y^2}\right)$

 c. $\sqrt{35x^2y^7} \div \sqrt{7xy^8}$

48. Resolva a equação: $\sqrt[3]{x+7} = 2$.

49. Simplifique as expressões.

 a. i^{11}

 b. $\sqrt{-18x}$

50. Simplifique as expressões.

 a. $(3 - 2i) - 5(-2 + 3i)$

 b. $(-3 + i)(5 - 6i)$

 c. $(2 + i) \div (4 - i)$

Capítulo 13

51. Resolva a equação pela fatoração: $2x^2 - x = 15$.

52. Resolva completando o quadrado: $3x^2 + 12x - 21 = 0$.

53. Resolva usando a fórmula quadrática (ou de Bhaskara): $2x^2 + 5x + 6= 0$

54. Sem calculá-las, determine quantas soluções reais a equação $9x^2 - 3x = -\frac{1}{4}$ tem.

55. Resolva a inequação e desenhe a solução: $x^2 + 2x - 24 \leq 0$

Capítulo 14

56. Demonstre que $x - 1$ é um fator do polinômio $2x^3 - 11x^2 + 4x + 5$ e use esta informação para fatorar completamente o trinômio.

57. Se 8 é uma raiz da equação $x^3 - 5x^2 - 42x + 144 = 0$, use esta informação para encontrar as outras duas raízes.

58. Identifique todas as quatro raízes racionais da equação polinomial $4x^4 - 13x^3 - 37x^2 + 106x - 24 = 0$.

59. Ache todas as raízes da equação: $x^3 + 7x^2 + 19x + 45 = 0$.

Capítulo 15

60. Se $f(x) = x^3 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 + 6$, calcule.

    a. $(f - g)(x)$

    b. $(fg)(-2)$

61. Se $h(x) = (x+1)^2$ e $j(x) = x - 3$, calcule.

    a. $h(j(x))$

    b. $(j \circ h)(-1)$

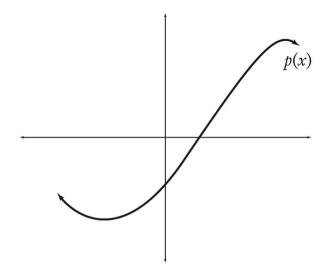
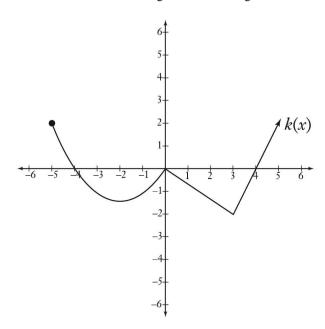
62. Se $f(x) = 6(x - 1) + 2$, encontre $f^{-1}(x)$.

63. Dado $g(x)$ como definido abaixo, calcule $g(-2)$ e $g(3)$.

$$g(x) = \begin{cases} |2x+3|, & x \leq -2 \\ 2x+3, & -2 < x < 2 \\ -|2x+3|, & x \geq 2 \end{cases}$$

Capítulo 16

64. Trace a função $f(x) = \sqrt{-x} + 2$ usando as transformações e, depois, verifique a exatidão do gráfico, desenhando novamente a função, desta vez ao traçar os pontos.

65. Examine o gráfico de $p(x)$ a seguir. Ele é uma função? Se sim, $p(x)$ é injetora? Por que sim ou por que não?

66. Determine o domínio e a imagem de $k(x)$ a seguir.

Capítulo 17

67. Simplifique a expressão $\frac{3x^2+13x-10}{2x^2+11x+5}$.

68. Reescreva cada letra abaixo como uma única expressão e simplifique.

a. $\frac{3x}{x^2-9x+20}-\frac{2}{x-5}$

b. $\frac{x^2y^3}{x^2+13x+36}\cdot\frac{x^2-81}{x^4y^2}$

c. $\frac{x^2-6x-27}{x^2-11x+18}\div\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-2x}$

69. Simplifique a fração complexa abaixo.

$$\frac{\frac{6x+4}{x^2}}{\frac{12x+8}{x^3-x}}$$

Capítulo 18

70. Resolva as equações.

a. $\frac{x}{2x^2-5x+3}-\frac{x+5}{2x^2+x-6}=\frac{6}{x^2+x-2}$

b. $\frac{x+6}{18}=\frac{-3}{x-9}$

71. As variáveis x e y variam proporcionalmente, sendo $x = 3$ quando $y = 5$. Determine o valor de x quando $y = 16$.

72. Assuma que x é inversamente variável a y e que $y = 35$ quando $x = 5$. Encontre o valor de y quando $x = 25$.

73. Resolva e desenhe a inequação: $\frac{3x+1}{x-4}\leq 2$.

Capítulo 19

74. O quanto de juros simples terá um investimento principal de R$9.500 em uma poupança com a taxa de juros anual de 4,95%, se deixado sem movimentação por 35 anos?

75. Há exatamente 20 anos, um depósito foi feito em uma poupança com uma taxa de juros anual de 6,8%, composta trimestralmente. Se o saldo atual é de R$55.852,71, qual foi o investimento principal?

76. Você quer marcar o perímetro do seu quintal retangular com cercas e comprou exatamente a quantia certa para cumprir a tarefa: 115 metros. Se o comprimento do seu quintal é de exatamente 0,5 metros mais duas vezes a sua largura, encontre o comprimento do quintal.

77. A lebre quer revanche. Aprendendo com seus erros passados contra a tartaruga, ele irá adiar a volta olímpica até a corrida ter acabado. Se a tartaruga tem uma vantagem de 90 minutos e parte com uma velocidade média de 0,90 metros/minuto, quanto tempo o coelho (que corre a uma velocidade média de 180 metros/minuto) levará até ultrapassar a tartaruga?

78. Uma bebida com sabor de maçã de 250ml e que contém 15% de suco de maçã natural é misturada com 1l de outro suco. Se a mistura resultante possui 12,6% de suco de maçã, qual era a concentração de suco da bebida de 1l?

Soluções

Capítulo 1: (1) Positivo, real, racional, complexo (ver o Capítulo 12); (2) –2; (3a) – 30; (3b) 7; (4a) –3; (4b) 12; (5a) Propriedade associativa da adição; (5b) Propriedade inversa multiplicativa; (5c) Propriedade identidade da adição; (5d) Propriedade comutativa da multiplicação.

Capítulo 2: (6) $\frac{5}{8}$; (7) $\frac{6}{12}, \frac{27}{12}, \frac{10}{12}$; (8a) $\frac{67}{30}$; (8b) $\frac{1}{21}$; (8c) $\frac{18}{5}$.

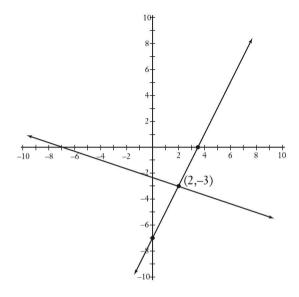
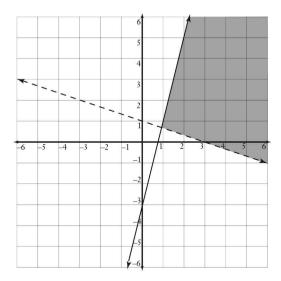
Capítulo 3: (9a) $x - 17$; (9b) $x(3x + 1)$; (10a) –8; (10b) 625; (11) $\frac{x^{16}}{y^{8}}$; (12a) $6{,}79 \times 10^{-6}$; (12b) $2{,}34 \times 10^{25}$; (13) $-12x^6 - 21x^2 + 27x$; (14) –6; (15) –90.

Capítulo 4: (16a) $w = 9$; (16b) $x = -\frac{2}{21}$; (16c) $y = 3$; (16d) $x = -4$; (16e) $x = -1$ ou 7; (17) $y = \frac{5}{4}x - 5$.

Capítulo 5: (18) $A = (0,4)$, $B = (2,0)$, $C = (4,5)$, $D = (-2,3)$, $E = (5,-3)$ e $F = \left(-1,-3\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$; (19) (2,0) e $\left(0,-\frac{8}{3}\right)$; (20) B; (21) $\frac{1}{13}$; (22) (4,–5).

Capítulo 6: (23) $2x + 3y = 4$; (24) inclinação $= \frac{5}{3}$, interceptor $y = 3$; (25) $6x + 7y = 31$; (26) $x - 2y = 7$.

Capítulo 7: (27) $y < -3$; (28) D; (29a) $x > \frac{1}{2}$ ou $x < \frac{1}{2}$ (todos os números reais, exceto $x = \frac{1}{2}$); (29b) $-6 \leq x \leq -2$; (30) $x + 2y < -2$.

Capítulo 8: (31)(2,–3), de acordo com o gráfico abaixo;

(32) (1,–2); (33) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$; (34) Inconsistente (sem solução); (35) Veja o gráfico seguinte:

Capítulo 9: (36) $\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 0 & 2 \\ -16 & 13 \end{bmatrix}$; (37) $\begin{bmatrix} 17 & -15 & 25 & -48 \\ -6 & 5 & -7 & 14 \end{bmatrix}$; (38a) –59; (38b) – 51; (39) $\left(-\frac{1}{9},4\right)$.

Capítulo 10: (40a) Binômio Quártico (ou de quarto grau); (40b) Monômio Cúbico; (41) $2x^3y + 24x^3 + 5x^2y - 2xy^4$;

(42a) $2x^3y^2 + 11x^2y^4 - 21xy^6$; (42b) $x^3 - x^2y - 7xy^2 + 3y^3$;

(43a) $x^2 + 5x + 9 + \frac{12x-4}{x^2-2x+1}$; (43b) $x^3 - 4x^2 + 5x - 1 + \frac{12}{x-5}$.

Capítulo 11: (44a) $3x^2y(4x - 2y + 3x^3y^2)$; (44b) $(6x - 5y)(2x + 3)$; (44c) $(4x + 1)(4x - 1)$; (44d) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; (44e) $(x + 12)(x - 3)$; (44f) $(6x + 1)(x - 3)$

Capítulo 12: (45a) $-3x^3y^2\left(\sqrt[3]{xy^2}\right)$; (45b) $5|xy|\sqrt{3y}$; (46) 128; (47a) $-2\sqrt{3x}$; (47b) $3xy\sqrt[3]{2x}$; (47c) $\sqrt{\frac{5x}{y}}$; (48) $x = 1$; (49a) $-i$; (49b) $3i\sqrt{2x}$; (50a) $13 - 17i$; (50b) $-9 + 23i$; (50c) $\frac{7}{17}+\frac{6}{17}i$.

Capítulo 13: (51) $x = -\frac{5}{2}, x = 3$; (52) $x = -2 + \sqrt{11}, x = -2 - \sqrt{11}$;

(53) $x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i, x = -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$; (54) Uma (uma raiz dupla);

(55) $-6 \leq x \leq 4$, veja o gráfico abaixo.

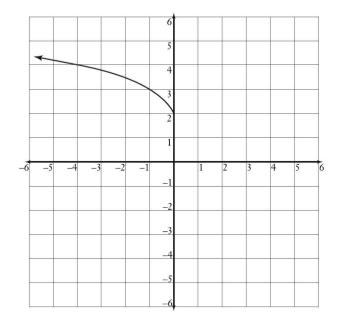
Capítulo 14: (56) $(x - 1)(2x + 1)(x - 5)$; (57) –6 e 3; (58) $-3, \frac{1}{4}, 2, 4$;

(59) $-5, -1 + 2i\sqrt{2}, -1 - 2i\sqrt{2}$.

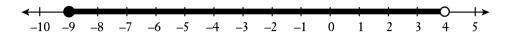
Capítulo 15: (60a) $(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 4x - 7$; (60b) $(f\,g)(-2) = -170$;

(61a) $h(j(x)) = x^2 - 4x + 4$; (61b) $(j \circ h)(-1) = -3$; (62) $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$;

(63) $g(-2) = 1$; $g(3) = -9$.

Capítulo 16: (64) Veja o gráfico abaixo.

(65) $p(x)$ é uma função porque passa no teste da reta vertical, mas não é uma função injetora porque não passa no teste da reta horizontal; (66) Domínio: $x \geq -5$, imagem: $y \geq -2$.

Capítulo 17: (67) $\frac{3x-2}{2x+1}$; (68a) $\frac{x+8}{(x-5)(x-4)}$; (68b) $\frac{y(x-9)}{x^2(x+4)}$; (68c) $\frac{1}{x-1}$; (69) $\frac{x^2-1}{2x}$.

Capítulo 18: (70a) $x = \frac{23}{14}$; (70b) $x = 0,3$; (71) $x = \frac{48}{5}$; (72) $y = 7$; (73) $-9 \leq x < 4$, veja o gráfico abaixo.

Capítulo 19: (74) R$16.458,75; (75) R$14.500,00; (76) 38,5 metros; (77) A lebre ultrapassa a tartaruga depois de apenas $\frac{90}{199} \approx 0.452$ minutos; (78) 12%.

Apêndice A

Soluções de “Você Tem Problemas”

Aqui estão as soluções detalhadas para todos os quadros de “Você tem problemas”, espalhados ao longo do livro. Sugiro que você só olhe essas páginas depois de ter tentado ao máximo e ter chegado a uma resposta, ou se estiver desesperadamente empacado; você deverá achar informações suficientes para entender qualquer passo importante ou difícil.

Não olhe apenas para o problema e vire para cá para achar a resposta! A menos que *você realmente faça o problema primeiro*, você nunca irá dominar o conceito por conta própria.

Capítulo 1

1. Apenas números positivos, racionais e reais. Já que $\frac{3}{7}$ é uma fração, ele é automaticamente excluído dos grupos de números naturais, números inteiros e irracionais. Apesar de positivo, ele não pode ser considerado par, ímpar, primo ou composto, porque todas essas quatro classificações se aplicam apenas para inteiros.

2. Elimine sinais duplos para obter 6 + 2 – 5 + 4. Você ganhará um total de 12 (6 + 2 + 4), mas perderá 5 para uma resposta final de 7.

3. (a) 40. Como 8 vezes 5 é igual a 40, e como os dois números são negativos (e logo possuem o mesmo sinal), a resposta é positiva.

   (b) –5. A resposta deve ser negativa porque os sinais são diferentes.

4. $-(8) = -8$; $|8| = 8$.

5. (a) 10. Subtraia $(4 - 2)$ primeiro para obter 5×2.

   (b) 2. O agrupamento algébrico mais "interno", os parênteses, deve ser feito primeiro para obter $|2-4|$. Subtraia $|-2|$ e, depois, calcule o valor absoluto: $|-2| = 2$.

6. (a) Propriedade comutativa da adição (a ordem dos números não altera o resultado).

   (b) Propriedade inversa da adição (o resultado é 0 é o elemento identidade da adição).

   (c) Propriedade associativa da multiplicação (a ordem dos números não muda, apenas a maneira que eles são agrupados).

Capítulo 2

1. (a) $\frac{1}{3}$; divida 7 e 21 pelo MDC (ou maior fator comum), que é 7.

   (b) $\frac{3}{5}$; MDC = 8.

2. $\frac{10}{30}, \frac{25}{30}, \frac{21}{30}$. O MMC (ou mínimo múltiplo comum) é 30. Multiplique o numerador e o denominador da primeira fração por 10, a segunda fração por 5 e a terceira fração por 3.

3. $\frac{5}{4}$. Comece com denominadores comuns $\left(\frac{18}{12} - \frac{4}{12} + \frac{1}{12}\right)$, combine os numeradores $\left(\frac{15}{12}\right)$ e, então, simplifique ao dividir o numerador e o denominador por 3.

4. 1. Escreva 8 como uma fração $\left(\frac{5}{6}\times\frac{8}{1}\times\frac{3}{20}\right)$, depois multiplique os numeradores e os denominadores para obter $\frac{120}{120}$. Qualquer número dividido por si mesmo é igual a 1.

5. $\frac{3}{2}$. Simplifique primeiro dentro dos parênteses, usando o menor denominador, 14: $\frac{7}{14}-\frac{4}{14}=\frac{3}{14}$. Isso deixa o problema de divisão $\frac{3}{14}\div\frac{1}{7}$, que é equivalente ao problema de multiplicação $\frac{3}{14}\times\frac{7}{1}=\frac{21}{14}$. Simplifique.

Capítulo 3

1. $\frac{1}{3}x-5$. Um terço de um número é igual a $\frac{1}{3}x$, e 5 subtraído disso é $\frac{1}{3}x-5$.

2. 81. $(-3)(-3)(-3)(-3) = 9(-3)(-3) = -27(-3) = 81$.

3. x^9y^{11}. Aplique as Regras 3 e 4 para obter $(x^{15}y^5)\cdot(x^{-6}y^6)$. Então, aplique a Regra 1: $x^{15+(-6)}y^{5+6} = x^9y^{11}$.

4. (a) $2{,}3451 \times 10^{13}$.

   (b) $1{,}25 \times 10^{-9}$.

5. $12xy^3 - 30y^5 + 48y^3$. Lembre-se de que, se você estiver multiplicando expressões exponenciais com a mesma base, você pode adicionar as potências. Caso contrário, apenas liste as variáveis uma ao lado da outra, em ordem alfabética.

6. 12. Você tem expoentes, divisão e multiplicação, então comece com os expoentes: $100 \div 25 \cdot 3$. A multiplicação e a divisão estão no mesmo passo, trabalhando da esquerda para a direita: $4 \cdot 3 = 12$.

7. 80. Substitua os valores para obter $5((-1) - 3)^2$. Primeiro, trabalhe dentro dos parênteses $(-1 - 3 = -4)$ para obter $5(-4)^2$. Já que $(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$, a resposta será $5 \cdot 16 = 80$.

Capítulo 4

1. $x = 11$. Para isolar o x no lado esquerdo, adicione -8 aos dois lados da equação (porque -8 é o oposto de 8). Isso deixa a expressão $19 - 8$ no lado direito, que deve ser simplificada.

2. $w = -20$. Multiplique os dois lados da equação por $-\frac{5}{4}$ para obter $\frac{20}{20}w=-\frac{80}{4}$, que, simplificado, é igual a $w = -20$.

3. (a) $x = \frac{17}{6}$. Distribua o 3 para obter $6x - 3 = 14$ e adicione 3 aos dois lados para separar a variável: $6x = 17$. Divida os dois lados por 6 (a fração não pode ser simplificada).

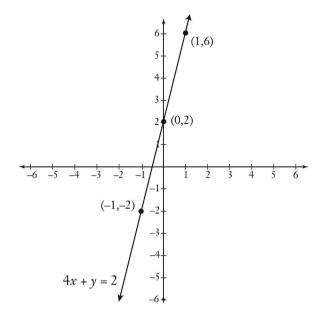
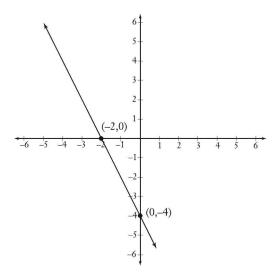
   (b) $x = -10$. Subtraia $4x$ e adicione 7 aos dois lados da equação para obter $-2x = 20$. Divida os dois lados por −2 e simplifique.

4. $x = -5$ ou $x = 5$. Isole a quantia de valor absoluto adicionando 6 aos dois lados: $|x-5| = 10$. Divida em duas equações ($x - 5 = 10$ e $x - 5 = -10$) e resolva-as separadamente.

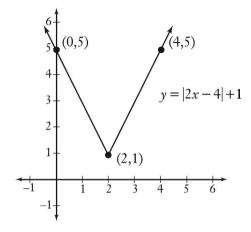
5. $y = -3x + \frac{5}{3}$. Isole o termo y ao subtrair $9x$ dos dois lados: $3y = -9x + 5$. Agora, divida ambos os lados por 3: $y = \frac{-9x+5}{3}$. Escreva como frações separadas $\left(y = \frac{-9}{3}x + \frac{5}{3}\right)$ e simplifique.

Capítulo 5

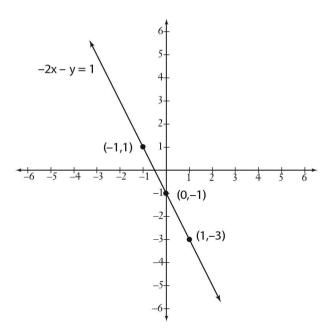
1. $A = (-4,-4)$, $B = (0,3)$, $C = (-2,0)$, $D = (-5,4)$, $E = (2,-1)$, e $F = \left(5\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ ou $F = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Calcule para obter o valor de $y = 4x + 2$. Inserindo em $x = -1$, 0, e 1, resulta nos pares de coordenadas (−1,−2), (0,2) e (1,6). Trace e ligue esses pontos.

3. Insira 0 em x para obter $2y = -8$ e um interceptor y de $(0,-4)$; insira 0 em y para obter $4x = -8$ e um interceptor x de $(-2,0)$. Trace os pontos e ligue-os para obter o gráfico.

4. $-\frac{2}{3}$. Aplique a fórmula da inclinação: $\frac{6-(0)}{-5-(4)} = \frac{6}{-9}$ e simplifique a resposta.

5. Defina $2x - 4 = 0$ e calcule para achar o valor de $x = 2$. Insira isso na equação para obter o valor y correspondente que completa o vértice: $(2,1)$. Agora escolha um x menor que 2 e um x maior que 2 (talvez $x = 0$ e $x = 4$) e calcule os pares de coordenadas associados a eles. Para os valores x indicados, esses pares são $(0,5)$ e $(4,5)$. Desenhe duas retas que começam no vértice e passam entre esses pontos.

Capítulo 6

1. $y = 4x - 15$. Substitua $m = 4$, $x_1 = 2$, e $y_1 = -7$ na fórmula ponto-inclinação para obter $y - (-7) = 4(x - 2)$. Simplifique ambos os lados ($y + 7 = 4x - 8$) e termine subtraindo 7 dos dois lados.

2. Inclinação = $-\frac{3}{2}$; interceptor $y = (0,2)$. Subtraia $3x$ dos dois lados e divida por 2 para achar o valor de y: $y = -\frac{3}{2}x + 2$. A inclinação é o coeficiente do termo x, e o interceptor y é a constante.

3. Calcule o valor de y para obter $y = -2x - 1$. Repare que a inclinação deve ser uma fração, mas, como -2 é um inteiro, ela é também racional: $-\frac{2}{1}$. Conte duas unidades para baixo e uma à direita a partir do interceptor y de $(0,-1)$; ou conte duas unidades acima e uma à esquerda para obter outro ponto na reta.

4. $2x - 15y = -28$. Multiplique tudo pelo mínimo múltiplo comum que é 12, para eliminar as frações: $15y = 28 + 2x$. Subtraia $2x$ dos dois lados da equação: $-2x + 15y = 28$. Finalmente, multiplique tudo por -1 para fazer com que o termo x seja positivo.

5. $x - y = -8$. Primeiro, calcule a inclinação: $m = \frac{0-(5)}{-8-(-3)} = \frac{-5}{-5} = 1$. Agora, aplique a fórmula ponto-inclinação usando um dos pontos. Se você escolheu o ponto (–8,0), você obterá $y = 1(x - (-8))$, ou $y = x + 8$. Coloque essa equação na forma padrão.

6. $x - 3y = -9$. Coloque $-2x + 6y = 7$ na forma inclinação-interceptor $\left(y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}\right)$ para determinar a sua inclinação $\left(\frac{1}{3}\right)$. A reta k deve ter a mesma inclinação, então, aplique a fórmula ponto-inclinação usando o ponto dado (–6,1) para obter $y-(1) = \frac{1}{3}(x-(-6))$, que ao ser simplificado fica igual a $y - 1 = \frac{1}{3}x + 2$. Coloque essa equação na forma padrão.

Capítulo 7

1. (a) Falsa, nenhum número pode ser menor que si mesmo. Se a afirmação tivesse sido $-3 \leq -3$, entretanto, ela seria verdadeira.

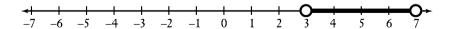
   (b) Verdadeira; 5 é menor que ou igual a 11 (apenas uma dessas duas condições pode ser verdadeira de cada vez, e é verdade que 5 é menor que 11).

2. $w \leq 15$. Primeiro, simplifique o lado esquerdo ao distribuir o 2: $2w - 12 \leq 18$. Isole a variável ao adicionar 12 aos dois lados: $2w \leq 30$. Divida os dois lados por 2 para obter a resposta final. Não há necessidade do sinal de inequação ser revertido, já que você está dividindo ambos os lados por um número positivo.

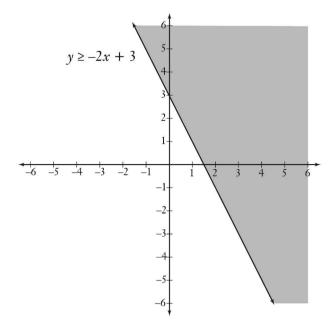
3. Resolva a inequação ao subtrair $2x$ e 1 dos dois lados para obter $-3x \geq -6$. Agora, divida os dois lados por –3 para obter $x \leq 2$ (não se esqueça de inverter o sinal de inequação). O gráfico consiste em um ponto sólido no 2 e uma flecha que se estende do ponto à esquerda.

4. $-3 < x < 4$. Subtraia 5 de todas as três partes para obter $-6 < 2x < 8$ e, então, divida tudo por 2 para obter a resposta final.

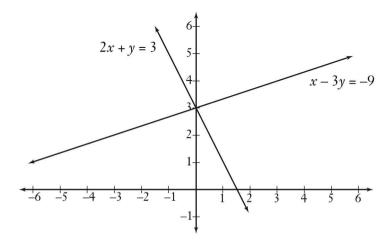
5. Desenhe um ponto sólido em –2 e um ponto aberto em 5 na reta numérica, e ligue os pontos com uma linha escura.

6. $3 < x < 7$. Divida os dois lados por 4 para isolar a quantidade de valor absoluto: $|x - 5| < 2$. Reescreva a afirmação como $-2 < x - 5 < 2$ e resolva ao adicionar 5 a tudo. O gráfico é um segmento de reta com ponto abertos de 3 a 7.

7. $x \leq 2$ ou $x \geq 6$. Divida a inequação apropriadamente ($x - 4 \geq 2$ ou $x - 4 \leq -2$) e resolva. Os dois sinais de inequação especificam que "ou igual a", então, certifique-se de usar pontos sólidos no gráfico.

8. Repare que a inequação está na forma inclinação-interceptor, sendo inclinação $m = -2$ e o interceptor y (0,3). O símbolo de inequação especifica que "ou igual a", então, a reta deve ser sólida. Se você testar o ponto (0,0), você obterá $0 \geq 3$, o que é falso; então, você deve escurecer a região que não contém a origem.

Capítulo 8

1. (0,3). Reescreva as duas equações na forma inclinação-interceptor.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$$

Repare que os dois gráficos possuem o mesmo interceptor y.

2. (3,–2). A primeira equação tem um coeficiente x igual a 1, então, calcule o valor de x para obter $x = 4y + 11$. Insira isso na outra equação.

$$\begin{aligned} 3(4y+11)+7y &= -5 \\ 12y+33+7y &= -5 \\ 19y+33 &= -5 \\ 19y &= -38 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Substitua $y = -2$ em $x = 4y + 11$ para obter o valor x correspondente: $x = 3$.

3. (–2,7). Multiplique a primeira equação por 2 para obter $4x - 2y = -22$ e a adicione à segunda equação.

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -22 \\ 5x & + & 2y & = & 4 \\ \hline 9x & & & = & -18 \end{array}$$

Substitua $x = -2$ em uma das equações originais para obter a resposta final.

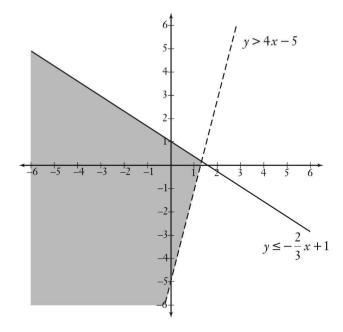
$$\begin{aligned} 5x+2y&=4 \\ 5(-2)+2y&=4 \\ -10+2y&=4 \\ 2y&=14 \\ y&=7 \end{aligned}$$

4. Dependente. Multiplique a primeira equação por 2 e a adicione à segunda equação. Todos os termos se cancelam.

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 6y & = & -4 \\ -8x & - & 6y & = & 4 \\ \hline 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

Como a afirmação sem variável $0 = 0$ é verdadeira, o sistema é dependente.

5. Trace as inequações que já estão na forma inclinação-interceptor. Você acabará escurecendo à esquerda da reta pontilhada e abaixo da reta sólida.

Capítulo 9

1. $\begin{bmatrix} 4 & 16 & 36 \\ -8 & 28 & -12 \\ 44 & -20 & 24 \end{bmatrix}$. Multiplique cada elemento de *B* por 4 para obter 4*B*

2. $\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 41 & -6 \end{bmatrix}$. Multiplique *A* pelo escalar 4 e *B* pelo escalar –3.

$$4A-3B=\begin{bmatrix} 4(-1) & 4(1/2) \\ 4(5) & 4(3) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3(1) & -3(-4) \\ -3(-7) & -3(6) \end{bmatrix}$$
$$4A-3B=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 21 & -18 \end{bmatrix}$$
$$4A-3B=\begin{bmatrix} -4-3 & 2+12 \\ 20+21 & 12-18 \end{bmatrix}$$

3. O produto *B* · *A* existe porque o número de colunas em *B* é igual ao número de fileiras em *A*. A ordem de *B* · *A* é 3 × 4; ela tem o mesmo número de fileiras de *B* e o mesmo número de colunas de *A*.

4. $\begin{bmatrix} 17 & -19 \\ -19 & 9 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}$. A matriz produto tem três fileiras (como a matriz esquerda) e duas colunas (como a matriz direita).

$$\begin{bmatrix} 2(6)+(-5)(-1) & 2(-2)+(-5)(3) \\ (-3)(6)+1(-1) & (-3)(-2)+1(3) \\ -4(6)+0(-1) & -4(-2)+0(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12+5 & -4-15 \\ -18-1 & 6+3 \\ -24+0 & 8+0 \end{bmatrix}$$

5. 3. Multiplique 9 vezes –1 e depois subtraia 3 vezes –4.

$$9(-1) - 3(-4) = -9 + 12 = 3$$

6. 279. Multiplique ao longo das diagonais ilustradas na Figura 9.3.

$$\begin{aligned} &(-2)(-5)(-3)+(-4)(1)(7)+(9)(3)(2)-(7)(-5)(9)-(2)(1)(-2)-(-3)(3)(-4) \\ &=-30-28+54+315+4-36 \\ &=279 \end{aligned}$$

7. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$. As matrizes da Regra de Cramer são $C=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}-7 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, e $B=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 3 & 1\end{bmatrix}$. Os determinantes são $|C|=12-(-15)=27$, $|A|=-14-(-5)=-9$, e $|B|=6-(-21)=27$. Logo, $x=\frac{|A|}{|C|}=\frac{-9}{27}=-\frac{1}{3}$ e $y=\frac{|B|}{|C|}=\frac{27}{27}=1$.

Capítulo 10

1. (a) Como ele possui dois termos, sendo um de grau 3, $4x^3 + 2$ é um binômio cúbico.

   (b) Se x não é elevado a uma potência explícita, então a potência é entendida como sendo igual a 1. Então, o polinômio pode ser reescrito como $11x^1$. Ele possui um termo com uma variável elevada à 1ª potência, então $11x$ é um monômio linear.

2. $5x^2 - 12x + 1$. Comece distribuindo o 2 para obter $x^2 - 9 + 2x^2 - 12x + 10$. Neste polinômio, $3x^2$ e $2x^2$ são termos iguais, assim como –9 e 10, então, combine-os. O termo $-12x$ não tem termos iguais no polinômio, então, deixe-o sozinho.

3. $15x^5y + 12x^4y^2 - 6x^2y^6$. Distribua $3x^2y$ para cada termo e calcule os produtos: $(3x^2y)(5x^3) = 15x^5y$, $(3x^2y)(4x^2y) = 12x^4y^2$ e $(3x^2y)(-2y^5) = -6x^2y^6$. Escreva os termos em ordem decrescente dos expoentes de x (porque x vem alfabeticamente antes que y).

4. $2x^2 - 5xy - 3y^2$. Distribua $2x$ e depois y aos termos da expressão $x - 3y$.

   $$2x(x) + 2x(-3y) + y(x) + y(-3y) = 2x^2 - 6xy + xy - 3y^2$$

   Combine os termos iguais $-6xy$ e xy: $-6xy + xy = -5xy$.

5. $x-11+\frac{52}{x+4}$. Realize a divisão longa.

$$\begin{array}{rl}
x^2 - 7x + 8 & \underline{|x + 4} \\
\underline{x^2 - 4x} & x - 11 \\
-11x + 8 & \\
\underline{11x + 44} & \\
52 &
\end{array}$$

6. $4x^2 + 6x + 2 + \dfrac{5}{x-2}$. Realize a divisão sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 4 & -2 & -10 & 1 \\ & & 8 & 12 & 4 \\ \hline & 4 & 6 & 2 & 5 \end{array}$$

Capítulo 11

1. $3x^3y^2(3x^2 + xy - 2y^5)$. O MDC (ou máximo divisor comum) do coeficiente é 3. A menor potência de x é x^3, e a menor potência de y é y^2; então, o MDC do polinômio é $3x^3y^2$. Divida os termos do polinômio original pelo MDC.

$$\begin{aligned} &\frac{9x^5y^2}{3x^3y^2} + \frac{3x^4y^3}{3x^3y^2} - \frac{6x^3y^7}{3x^3y^2} \\ &= \frac{9}{3}x^{5-3}y^{2-2} + \frac{3}{3}x^{4-3}y^{3-2} - \frac{6}{3}x^{3-3}y^{7-2} \\ &= 3x^2y^0 + 1x^1y^1 - 2x^0y^5 \\ &= 3x^2 + xy - 2y^5 \end{aligned}$$

Multiplique essa nova expressão pelo MDC $3x^3y^2$ para finalizar.

2. $(2x + 1)(6x^3 + 7)$. Os primeiros dois termos têm um MDC $6x^3$ e os outros possuem MDC 7. Fatore os MDCs para obter $6x^3(2x + 1) + 7(2x + 1)$. Finalmente, fatore o binômio comum $(2x + 1)$ e escreva o que sobrou entre parênteses.

3. $5(x + 5)(x - 5)$. Comece fatorando o MDC 5 para obter $5(x^2 - 25)$. Porque $x^2 - 25$ é a diferença de quadrados perfeitos ($a^2 - b^2$ quando $a = x$ e $b = 5$), ele deve ser fatorado além: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$.

4. $2x(x - 8)(x - 4)$. Fatore o MDC $2x$: $2x(x^2 - 12x + 32)$. Como 32 é positivo, os sinais dos números misteriosos são correspondentes, e quando adicionados são um número negativo (−12), os dois números devem ser negativos. Os únicos dois números negativos que quando adicionados são iguais a −12 e quando multiplicados são iguais a 32 são −8 e −4.

5. $(4x - 1)(x + 6)$. Os dois números que adicionados são iguais a 23 e que têm são produto de $4(-6) = -24$ são 24 e 1. Reescreva o polinômio $4x^2 + (24 - 1)x - 6$ e distribua x para obter $4x^2 + 24x - x - 6$; fatore cada grupo para terminar.

$$4x(x + 6) - 1(x + 6) = (x + 6)(4x - 1)$$

Capítulo 12

1. $10|x^3y|\sqrt{3y}$. O radical é uma raiz quadrada, então, apenas quadrados perfeitos escapam. Reescreva o coeficiente como $100 \cdot 3$, ou $10^2 \cdot 3$. Repare que x^6 é um quadrado perfeito – ele pode ser escrito como $x^3 \cdot x^3$ ou $(x^3)^2$, então, ele é elevado à segunda potência. O melhor que você pode fazer para y^3 é reescrevê-lo como $y^2 \cdot y$, para que ele contenha um quadrado perfeito: $\sqrt{100^2 \cdot 3 \cdot (x^3)^2 \cdot y^2 \cdot y}$. Tanto x^3 quanto y são elevados a uma potência que é correspondente ao índice par do radical, então eles devem ser cercados por barras de valores absolutos.

2. 125. Reescreva $25^{3/2}$ como $\left(\sqrt{25}\right)^3$. Como $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$, isso significa que $\left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$.

3. $6x\sqrt[3]{x}$. Reescreva o primeiro radical como $\sqrt{36x^3y^2}$, para que, então, ele contenha tantos cubos perfeitos quanto possíveis. Uma vez que esses cubos perfeitos estão em condicional, o radical é simplificado para $2x\sqrt[3]{x}$ e o problema original se torna $2x\sqrt[3]{x} + 4x\sqrt[3]{x}$. Agora, você tem radicais iguais, com coeficientes que são termos iguais; então, adicione os coeficientes juntos: $(2x + 4x)\sqrt[3]{x} = 6x\sqrt[3]{x}$.

4. $6|xy|\sqrt{x}$. Multiplique os radicandos para obter $\sqrt{36x^3y^2}$ e simplifique o radical: $\sqrt{6^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^2} = 6|xy|\sqrt{x}$. Não se esqueça que tanto x quanto y precisam estar com um sinal de valor absoluto, eles são elevados a uma potência par, que é correspondente ao índice.

5. $\frac{\sqrt{xy}}{3|x|}$. Simplifique a fração: $\sqrt{\frac{2x^2y^3}{18x^3y^2}}$.

$$\sqrt{\frac{2}{18}x^{2-3}y^{3-2}} = \sqrt{\frac{1}{9}x^{-1}y^1} = \sqrt{\frac{y}{9x}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3^2 \cdot x}} = \frac{\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}$$

Racionalize ao multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{x}$.

$$\frac{\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{xy}}{3\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{3|x|}$$

6. $x = 19$. Divida os dois lados por 2 para isolar o radical: $\sqrt{x-3} = 4$. O índice do radical é 2, então, eleve os dois lados à segunda potência.

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = 4^2$$
$$x - 3 = 16$$

Resolva a equação adicionando 3 aos dois lados.

7. $5i$. Reescreva o termo esquerdo usando um quadrado perfeito e o da direita usando as potências de i^2.

$$\begin{aligned}\sqrt{-36}+i^3 &= \sqrt{-1\cdot 6^2}+i^{2+1}\\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{6^2}+i^2\cdot i\\ &= i\cdot 6+(-1)i\\ &= 6i-i\\ &= -5i\end{aligned}$$

8. (a) $(3 - 4i) + (8 + i) = (3 + 8) + (-4i + i) = 11 - 3i$

(b) $(3 - 4i) - (8 + i) = (3 - 4i) + (-8 - i) = (3 - 8) + (-4i - i) = -5 - 5i$

(c)
$$\begin{aligned}(3-4i)(8+i) &= 3(8)+3(i)+(-4i)(8)+(-4i)(i)\\ &= 24+3i-32i-4i^2\\ &= 24-29i-4(-1)\\ &= 28-29i\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\frac{3-4i}{8+i}\left(\frac{8-i}{8-i}\right) &= \frac{3(8)+3(-i)+(-4i)(8)+(-4i)(-i)}{8(8)+8(-i)+i(8)+i(-i)}\\ &= \frac{24-3i-32i+4i^2}{64-8i+8i-i^2}\\ &= \frac{24-35i+4(-1)}{64-(-1)}\\ &= \frac{20-35i}{65}\\ &= \frac{20}{65}-\frac{35}{65}i\\ &= \frac{4}{13}-\frac{7}{13}i\end{aligned}$$

Capítulo 13

1. $x=-\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}$. Subtraia $25x$ dos dois lados da equação e fatore o MDC para obter $x(4x^2 - 25) = 0$. A quantia em parênteses é uma diferença de quadrados perfeitos, então, fatore-a: $x(2x + 5)(2x - 5) = 0$. Agora, defina cada fator como igual a 0 e resolva.

$$x=0 \quad \textbf{ou} \quad \begin{aligned}2x+5&=0\\ 2x&=-5\\ x&=-\frac{5}{2}\end{aligned} \quad \textbf{ou} \quad \begin{aligned}2x-5&=0\\ 2x&=5\\ x&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

2. $x = -3 - 2\sqrt{3}$ ou $x = -3 + 2\sqrt{3}$. O coeficiente de x^2 já é 1, então, adicione 3 aos dois lados da equação: $x^2 + 6x = 3$. De acordo com o inseto, você deve adicionar o quadrado da metade de 6, ou $3^2 = 9$, aos dois lados.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 3 + 9 \\ x^2 + 6x + 9 &= 12 \end{aligned}$$

Fatore o quadrado perfeito e tire a raiz quadrada dos dois lados da equação, para achar o valor de x.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 12 \\ \sqrt{(x+3)^2} &= \pm\sqrt{12} \\ x + 3 &= \pm 2\sqrt{3} \\ x &= -3 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. $x = -3 - 2\sqrt{3}$ ou $x = -3 + 2\sqrt{3}$. Neste problema, $a = 1$, $b = 6$ e $c = -3$.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2} = -\frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{4^2 \cdot 3}}{2} = -3 \pm \frac{4\sqrt{3}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

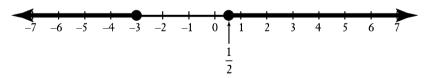
4. 1. Defina $a = 25$, $b = -40$ e $c = 16$ e calcule o discriminante.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-40)^2 - 4(25)(16) \\ &= 1600 - 1600 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Um discriminante 0 indica que o quadrático possui uma solução real, uma raiz dupla.

5. $x \leq -3$ ou $x \geq \frac{1}{2}$. Fatore o quadrático para obter $(2x-1)(x+3) \geq 0$, que produz os números críticos $x = \frac{1}{2}$ e $x = -3$. Eles separam a reta numérica nos intervalos $x \leq -3$, $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$, e $x \geq \frac{1}{2}$. Escolha um valor teste de cada intervalo (como $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$) e substitua cada um na inequação.

Teste x = −4	Teste x = 0	Teste x = 1
$2(-4)^2 + 5(-4) - 3 \geq 0$	$2(0)^2 + 5(0) - 3 \geq 0$	$2(1)^2 + 5(1) - 3 \geq 0$
$2(16) - 20 - 3 \geq 0$	$0 - 3 \geq 0$	$2 + 5 - 3 \geq 0$
$9 \geq 0$	$-3 \geq 0$	$4 \geq 0$
Verdadeiro	Falso	Verdadeiro

Os intervalos $x \leq -3$ e $x \geq \frac{1}{2}$ juntos compreendem a resposta, então, escureça esses intervalos em uma reta numérica (marcando os números críticos com pontos sólidos por causa do sinal de inequação ⩾) para completar o gráfico.

Capítulo 14

1. $(x + 2)(x - 2)(2x + 5)$. Já que $x + 2$ é linear, você pode aplicar a divisão sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 5 & -8 & -20 \\ & & -4 & -2 & 20 \\ \hline & 2 & 1 & -10 & 0 \end{array}$$

Logo, $2x^3 + 5x^2 - 8x - 20 = (x + 2)(2x^2 + x - 10)$. Use o método da bomba para fatorar o quadrático: $2x + x - 10 = (2x + 5)(x - 2)$.

2. −9 e 1. Aplique a divisão sintética para determinar se −2 é ou não uma raiz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 10 & 7 & -18 \\ & & -2 & -16 & 18 \\ \hline & 1 & 8 & -9 & 0 \end{array}$$

−2 é uma raiz, então, $(x - (-2)) = x + 2$ é um fator do polinômio.

$$x^3 + 10x^2 + 7x - 18 = 0$$
$$(x + 2)(x^2 + 8x - 9) = 0$$

Fatore o quadrático e resolva.

$$(x + 2)(x + 9)(x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{rcrcr} x + 2 = 0 & & x + 9 = 0 & & x - 1 = 0 \\ & \textbf{ou} & & \textbf{ou} & \\ x = -2 & & x = -9 & & x = 1 \end{array}$$

3. $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e 1. Aplique a divisão sintética para mostrar que $x = 1$ é uma raiz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 4 & 4 & -9 & -1 & 2 \\ & & 4 & 8 & -1 & -2 \\ \hline & 4 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Similarmente, –2 é uma raiz desse quociente, $4x^3 + 8x^2 - x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 4 & 8 & -1 & -2 \\ & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Portanto, $4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 2)(4x^2 - 1)$. O fator quadrático é uma diferença de quadrados perfeitos: $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Reescreva a equação original na forma fatorada e resolva.

$$4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x+2)(2x+1)(2x-1) = 0$$

$$\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} x+2=0 \\ x=-2 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} 2x+1=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} 2x-1=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

4. $3, -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{55}}{4}$, e $-\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{55}}{4}$. A única raiz racional é 3.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & 4 & -21 \\ & & 6 & 3 & 21 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 0 \end{array}$$

Fatore o polinômio para obter $(x - 3)(2x^2 + x + 7) = 0$. Defina os dois fatores como iguais a 0 e resolva.

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + x + 7 = 0$$

A solução da equação esquerda é $x = 3$. Use a fórmula quadrática (ou de Bhaskara) para resolver a equação à direita.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(7)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-55}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{-55}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{55}}{4}$$

Capítulo 15

1. (a) –18. Calcule $h(-1)$ e $k(-1)$.

$$h(x) = x^2 + 7x - 5 \qquad k(x) = 4x - 3$$
$$h(-1) = (-1)^2 + 7(-1) - 5 \qquad k(-1) = 4(-1) - 3$$
$$h(-1) = 1 - 7 - 5 \qquad k(-1) = -4 - 3$$
$$h(-1) = -11 \qquad k(-1) = -7$$

Some os resultados.

$$(h + k)(-1) = h(-1) + k(-1) = -11 + (-7) = -18$$

(b) –4. Use os valores de $h(-1)$ e $k(-1)$ calculados na parte (a).

$$(h - k)(-1) = h(-1) - k(-1) = -11 - (-7) = -11 + 7 = -4$$

(c) 77. Use os valores de $h(-1)$ e $k(-1)$ calculados na parte (a).

$$(hk)(-1) = h(-1) \cdot k(-1) = (-11)(-7) = 77$$

(d) $\frac{11}{7}$. Use os valores de $h(-1)$ e $k(-1)$ calculados na parte (a).

$$\left(\frac{h}{k}\right)(-1) = \frac{h(-1)}{k(-1)} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7}$$

2. (a) $f\left(\sqrt{x-2}\right) = x + 3$. Substitua x por $g(x) = \sqrt{x-2}$ na função $f(x) = x^2 + 5$.

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{x-2}\right) &= \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 5 \\ &= (x-2) + 5 \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

(b) $g\left(x^2 + 5\right) = \sqrt{x^2 + 3}$. Dessa vez, substitua $f(x)$ em $g(x)$.

$$\begin{aligned} g\left(x^2 + 5\right) &= \sqrt{\left(x^2 + 5\right) - 2} \\ &= \sqrt{x^2 + 3} \end{aligned}$$

Repare que a expressão $\sqrt{x^2 + 3}$ não pode ser simplificada. Enquanto é verdadeiro que x^2 é um quadrado perfeito, você pode libertá-lo da prisão radical apenas quando multiplicado pelos outros conteúdos do radicando, e não adicionados a eles.

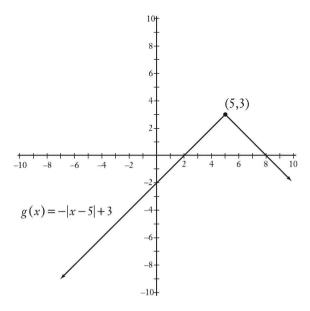
3. Se $f(x)$ e $g(x)$ são inversos, então $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

$$f(g(x)) = \frac{3}{1}\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5$$
$$= \frac{3x+15}{3} - 5$$
$$= \frac{3x}{3} + \frac{15}{3} - 5$$
$$= x + 5 - 5$$
$$= x$$

$$g(f(x)) = \frac{(3x-5)+5}{3}$$
$$= \frac{3x}{3}$$
$$= x$$

4. $g^{-1}(x) = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$. Reescreva $g(x)$ como y e inverta x e y na equação para obter $x = 7y - 3$. Ao calcular o valor de y, você obterá $y = \frac{x+3}{7}$ ou $y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$. Substitua y por $g^{-1}(x)$.

5. $f(1) < f(-1) < f(0)$. Já que $x = -1$ e $x = 0$ satisfazem a condição de que $x \leq 0$, substitua-os na primeira expressão $(3x + 4)$; $x = 1$ deve ser inserido em $x - x^2$, como $3 > 0$.

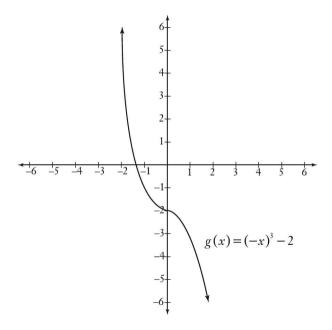
$$f(-1) = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1$$
$$f(0) = 3(0) + 4 = 4$$
$$f(1) = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$$

Capítulo 16

1. Como discutido no Capítulo 5, o gráfico é em forma de *v*.

2. De acordo com o teste da reta vertical, $g(x)$ é uma função; no entanto, $g(x)$ não passa no teste da reta horizontal; qualquer reta horizontal $y = c$ passará pelo gráfico duas vezes se $c < 3$, então, $g(x)$ não é injetora.

3. O gráfico se estende infinitamente à direita e à esquerda, então, qualquer reta vertical o cortará. Logo, o domínio de $g(x)$ são todos os números reais (nada é desqualificado). No entanto, apenas retas horizontais desenhadas na altura 3 ou abaixo atingirão o gráfico; então, a imagem é $y \le 3$.

4. Você está inserindo $-x$ em vez de x; o gráfico de x^3 é refletido no eixo y. Depois, mova o gráfico duas unidades abaixo, já que 2 é subtraído de x^3.

Capítulo 17

1. $\frac{x^2+3x}{3x+5}$. Fatore o numerador e o denominador completamente para obter $\frac{x(x+3)(2x-1)}{(2x-1)(3x+5)}$. Elimine o fator comum $2x - 1$ para obter $\frac{x(x+3)}{3x+5}$. Você pode deixar a sua resposta assim ou multiplicar os termos do numerador.

2. $\dfrac{x^2+3x+16}{(x-2)(x+2)(x-5)}$. Fatore os denominadores para obter $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{8}{(x-5)(x-2)}$. O MDC é $(x+2)(x-2)(x-5)$. Multiplique a parte de cima e a de baixo de cada fração pelos fatores necessários para chegar ao menor denominador comum.

$$\left(\frac{x-5}{x-5}\right)\cdot\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{8}{(x-5)(x-2)}\cdot\left(\frac{x+2}{x+2}\right)$$
$$=\frac{x^2-5x+8x+16}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

3. $\dfrac{x+2}{(x-4)(x+3)}$ ou $\dfrac{x+2}{x^2-x-12}$. Escreva o inverso da segunda fração, fatore tudo e multiplique as frações.

$$\frac{x^2-4x-12}{3x^2-10x-8}\cdot\frac{3x+2}{x^2-3x-18}=\frac{(x-6)(x+2)(3x+2)}{(3x+2)(x-4)(x+3)(x-6)}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{\cancel{(x-6)}(x+2)\cancel{(3x+2)}}{\cancel{(3x+2)}(x-4)(x+3)\cancel{(x-6)}}=\frac{x+2}{(x-4)(x+3)}$$

4. $(x-4)(x+2)$ ou x^2-2x-8. Reescreva a fração complexa como um problema de divisão, e depois use o inverso para reescrevê-la como um problema de multiplicação.

$$\frac{x^2-7x+12}{x+2}\div\frac{x-3}{x^2+4x+4}=\frac{(x^2-7x+12)(x^2+4x+4)}{(x+2)(x-3)}$$

Fatore e simplifique.

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-4)\cancel{(x+2)}(x+2)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-3)}}=\frac{(x-4)(x+2)}{1}$$

O denominador é 1, então, não há necessidade de incluí-lo na resposta.

Capítulo 18

1. $x = -\frac{11}{6}$. Fatore o segundo denominador em $(x - 8)(x + 2)$ e depois multiplique a equação inteira pelo menor denominador comum, $(x - 8)(x + 2)$.

$$\frac{(x-8)(x+2)}{1}\cdot\left[\frac{x+3}{x-8}+\frac{x}{(x-8)(x+2)}\right]=\frac{(x-8)(x+2)}{1}\cdot(1)$$

$$\frac{\cancel{(x-8)}(x+2)(x+3)}{\cancel{x-8}}+\frac{x\cancel{(x-8)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-8)}\cancel{(x+2)}}=\frac{(x-8)(x+2)}{1}$$

$$(x+2)(x+3)+x=(x-8)(x+2)$$

$$x^2+5x+6+x=x^2-6x-16$$

$$x^2+6x+6=x^2-6x-16$$

Calcule o valor de x.

$$x^2-x^2+6x+6x=-16-6$$

$$12x=-22$$

$$x=-\frac{22}{12}$$

$$x=-\frac{11}{6}$$

2. $x = -2$ ou $x=1$. Multiplique em cruz para transformar a proporção em uma equação quadrática e resolva.

$$(3x-2)(x+1)=x(2x)$$

$$3x^2+3x-2x-2=2x^2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x+2=0 \quad \text{or} \quad x-1=0$$

$$x=-2 \qquad\qquad x=1$$

3. $y=\frac{175}{4}$ (ou 43,75). Ache k, a constante de proporcionalidade: $k=\frac{y}{x}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$. Agora, use a equação $k=\frac{y}{x}$ de novo, dessa vez substituindo $k=\frac{5}{4}$ e $x = 35$: $\frac{5}{4}=\frac{y}{35}$. Multiplique em cruz e resolva.

$$5(35)=4\cdot y$$

$$175=4y$$

$$\frac{175}{4}=y$$

4. $x = \frac{675}{2}$ (ou 337,5). Já que x e y são inversamente variáveis, $xy = k$.

$$9(75) = k$$
$$675 = k$$

Agora resolva a equação $xy = k$ para achar o valor de x quando $y = 2$ e $k = 675$.

$$xy = k$$
$$x(2) = 675$$
$$x = \frac{675}{2}$$

5. $x < 2$ ou $x > \frac{13}{2}$. Subtraia 3 dos dois lados para obter zero no lado direito da inequação e combine os termos em uma fração.

$$\frac{x+7}{x-2} - 3 < 0$$
$$\frac{x+7}{x-2} - \left(\frac{x-2}{x-2}\right) \cdot \frac{3}{1} < 0$$
$$\frac{x+7}{x-2} - \frac{3x-6}{x-2} < 0$$
$$\frac{x+7-(3x-6)}{x-2} < 0$$
$$\frac{x+7-3x+6}{x-2} < 0$$
$$\frac{-2x+13}{x-2} < 0$$

Defina o numerador e o denominador como iguais a zero e resolva para identificar os números críticos; trace-os na reta numérica usando pontos abertos.

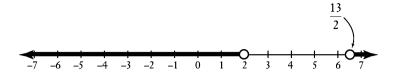
$$-2x + 13 = 0$$
$$-2x = -13$$
$$x = \frac{13}{2} = 6.5$$

ou

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Os números críticos dividem a reta numérica em três intervalos: $x < 2$, $2 < x < \frac{13}{2}$, e $x > \frac{13}{2}$. Escolha valores testes de cada intervalo (como $x = 0$, $x = 4$, e $x = 10$) e substitua-os na inequação.

Teste $x = 0$	Teste $x = 4$	Teste $x = 10$
$\frac{-2x+13}{x-2}<0$	$\frac{-2x+13}{x-2}<0$	$\frac{-2x+13}{x-2}<0$
$\frac{-2(0)+13}{0-2}<0$	$\frac{-2(4)+13}{4-2}<0$	$\frac{-2(10)+13}{10-2}<0$
$-\frac{13}{2}<0$	$\frac{5}{2}<0$	$-\frac{7}{8}<0$
Verdadeiro	Falso	Verdadeiro

Os intervalos $x < 2$ e $x > \frac{13}{2}$ são afirmações verdadeiras; então, eles englobam a solução. Escureça os intervalos na reta numérica para traçar o gráfico.

Capítulo 19

1. (a) R$13.250,00. Insira p = 5.000, r = 0,0825 e t = 20 na fórmula de juros simples.

$$\begin{aligned} i &= prt \\ &= (5{,}000)(0.0825)(20) \\ &= 8{,}250 \end{aligned}$$

Adicione os juros ao principal para calcular o saldo:
R$8.250,00 + R$5.000,00 = R$13.250,00.

(b) R$25.999,84. Aplique a fórmula de juros compostos com p = 5,000, r = 0,0825, t = 20 e n = 52.

$$\begin{aligned} b &= p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= 5{,}000(1.0015865)^{(52)(20)} \\ &= 5{,}000(5.1999684) \\ &= 25.999.84 \end{aligned}$$

2. $r = \sqrt[3]{18}$ metros. A altura é duas vezes o raio, $h = 2r$. Foi-lhe dado o volume do cilindro, então, use a fórmula correspondente, $V = \pi r^2 h$, insira os valores que você sabe, e ache o valor de r.

$$36\pi = \pi r^2 (2r)$$
$$36\pi = 2\pi r^3$$
$$\frac{36\not{\pi}}{2\not{\pi}} = r^3$$
$$18 = r^3$$
$$\sqrt[3]{18} = r$$

3. 6,75 horas. Pense na viagem até a loja como a viagem *A* e a viagem até em casa como a viagem *B*. Use duas fórmulas de distância, $D_A = v_A \,.\, t_A$ e $D_B = v_B \,.\, t_B$. Defina $v_A = 27$ e $t_A = 1{,}25$, então $D_A = 27\ (1{,}25) = 33{,}75$, o que significa que a distância entre sua casa e a loja é de 33,75 quilômetros. Durante o trajeto para casa, a sua velocidade é de 5 hm/h, então $v_B = 5$. A distância para casa é a mesma do que a distância até a loja, então $D_B = D_A = 33{,}75$. Aplique a fórmula $D_B = v_B \,.\, t_B$ e ache o valor de t_B.

$$D_B = r_B \cdot t_B$$
$$21.25 = 3(t_B)$$
$$\frac{21.25}{3} = t_B$$
$$7.08 \approx t_B$$

4. 3,87%. O ingrediente 1 é o de 26,5 litros de água com um valor descritivo de 1,2% = 0,012. O ingrediente 2 é o de 11,35 litros de água que irá encher o tanque, mas você não sabe o seu valor salino, então, use a variável x para representá-lo. O volume total do tanque é 37,85. Esse número deve ser multiplicado por 2% = 0,02. Crie a equação da mistura e ache o valor de x.

$$26{,}5\ (0{,}012) + 11{,}35x = 37{,}85\ (0{,}02)$$
$$0{,}318 + 11{,}35x = 0{,}757$$
$$11{,}35x = 0{,}757 - 0{,}318$$
$$11{,}35 = 0{,}439$$
$$x \approx 0{,}038678$$

Converta a uma porcentagem e arredonde para duas casas decimais: $x = 3.87\%$.

Apêndice B

Glossário

Abscissa: Palavra atribuída para a parte x de um par de coordenadas.

Agrupamentos algébricos: Símbolos como parênteses, colchetes ou chaves que separam os termos de uma expressão em um ou mais grupos.

Área: A quantidade de espaço ocupada por um objeto bidimensional.

Área de superfície: A quantidade de "pele" necessária para cobrir um objeto tridimensional, não considerando a sua espessura.

Assíntota: Reta limite que o gráfico sempre chega infinitamente perto, mas nunca a toca de verdade.

Axioma: Ver *propriedade.*

Base (de uma expressão exponencial): Na expressão a^b, a base é a.

Coeficiente: O número que aparece no início de um monômio. O coeficiente de $12xy^2$ é 12.

Coeficiente principal: O coeficiente do primeiro termo de um polinômio na forma padrão. Seu termo contém a variável elevada à maior potência.

Completar o quadrado: Processo usado para resolver equações quadráticas ao criar quadrados perfeitos binomiais.

Composição de funções: O processo de introduzir uma função em outra. Às vezes, é sinalizado com um círculo: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Composto: Um número que possui outros fatores além de si mesmo e o 1.

Conjugado: A quantidade $a - bi$ associada com todos os números complexos $a + bi$. A única diferença entre o número complexo e o seu conjugado é o sinal que precede a sua parte imaginária, bi.

Constante: Um número que não possui nenhuma variável.

Constante de proporcionalidade: Número real que descreve a variação direta ou indireta.

cubo perfeito Gerado pela multiplicação de um valor duas vezes por si mesmo; b^2 é um cubo perfeito porque $b \cdot b \cdot b = b^3$.

Decimal finito: Um número que não tem casas decimais infinitas.

Determinante (de uma matriz): Valor de um número real definido por matrizes quadradas.

Denominador: O número que fica embaixo de uma fração.

Denominador comum: Um denominador compartilhado por uma ou mais frações; deve estar presente para que estas frações sejam adicionadas ou subtraídas.

Dependente: Descreve um sistema de equações com um número infinito de soluções.

Discriminante: A expressão $b^2 - 4ac$, usada para determinar quantas soluções reais uma equação quadrática possui.

Dividendo: A quantidade b no problema de divisão $b\underline{|a}$ é o dividendo.

Divisão sintética: Técnica usada para calcular quocientes polinomiais quando o divisor é um binômio linear.

divisível Se a é divisível por b, então $\frac{a}{b}$ é um inteiro – o resto é zero.

divisor A quantidade a no problema de divisão $b\underline{|a}$ é o divisor.

Domínio: O conjunto de números reais que podem ser substituídos em uma função.

eixo x Reta horizontal no plano cartesiano com a equação $y = 0$.

eixo y Reta vertical no plano cartesiano com a equação $x = 0$.

Elementos: Os números, as variáveis ou as expressões dentro de uma matriz. Também chamados de entradas.

Elemento identidade: O número (0 para adição e 1 para multiplicação) que deixa o valor de um número sem alteração quando a operação correspondente é aplicada.

Equação: Uma sentença matemática que inclui um sinal de igualdade.

equação linear Uma equação da forma $ax + by = c$; seu gráfico é uma reta no plano cartesiano.

Escalar: Quando uma matriz é multiplicada por um número real, esse número é chamado de escalar.

Expoente: Na expressão a^b, o expoente é b.

Expressão: Afirmação matemática que não contém um sinal de igualdade.

Fator: Se a é um fator de b, então b é divisível por a.

forma inclinação-interceptor A equação linear $y = mx + b$, onde m é a inclinação e b é o interceptor y da reta.

forma padrão (de uma reta) Exige que uma equação linear possua a forma $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros e a não é negativo.

fórmula ponto-inclinação Uma reta com inclinação m que passa entre o ponto (x_1,y_1) tem a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Fração: Proporção entre dois números inteiros.

Fração complexa: Uma fração que contém outra fração em seu numerador, denominador ou em ambos. Também chamada de *fração composta*.

Fração composta: Ver *fração complexa*.

Fração imprópria: Uma fração cujo numerador é maior que o denominador.

Função: Uma relação onde cada entrada possui uma única saída correspondente.

Função definida por partes: Feita de duas ou mais funções que são restritas de acordo com a entrada. Cada função componente que faz parte da função definida por partes é apenas válida para valores x específicos.

funções inversas Funções que se cancelam quando compostas uma com a outra: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Grau: O maior expoente de um polinômio.

i O valor imaginário $\sqrt{-1}$.

Imagem: Todos os números reais que são saídas válidas de uma função.

Ímpar: Um número que não é divisível por 2.

Inclinação: Número que descreve o quão "inclinada" é uma reta, é igual à variação vertical da reta dividida por sua variação horizontal.

Inconsistente: Descreve um sistema de equações que não tem solução.

Indefinida: Descreve uma fração cujo denominador é zero mas o seu numerador não.

índice Na expressão radical $\sqrt[a]{b}$, a é o índice.

Inequação: Uma afirmação cujos lados são desiguais (quando o símbolo é $<$ ou $>$) ou possivelmente desiguais (se o símbolo for $\leqslant$ ou $\geqslant$).

Inequação composta: Uma afirmação de inequação que é composta por outras duas, como $a < x < b$.

Injetora: É uma função em que cada uma das suas entradas possui uma única saída (nenhuma entrada compartilha do mesmo valor de saída).

Inteiro: Um número com nenhuma fração ou decimal explícito.

Interceptor: Ponto nos eixos x ou y que o gráfico cruza.

Intervalo: Segmento de reta numérica.

inverso: O recíproco do número a, racional e diferente de 0, é $\frac{1}{a}$; o inverso e $\frac{c}{d}$ é $\frac{d}{c}$.

Juros compostos: Um método de ganhar juros no saldo total, em vez de apenas no investimento inicial.

Matriz: Um grupo de números ou expressões organizados em fileiras e colunas ordenadas cercados por colchetes.

Matriz quadrada: Uma matriz com números iguais de fileiras e colunas.

Máximo Divisor Comum (MDC): O maior fator de dois ou mais números ou termos.

Método da Bomba: Técnica usada para fatorar um polinômio quadrático com um coeficiente principal diferente de 1. Também chamado de fatoração por decomposição.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC): O menor denominador comum possível para um grupo de frações.

Multiplicação em cruz: Método para resolver proporções no qual você multiplica o numerador de uma fração pelo denominador de outra e define estes produtos como iguais.

Negativo: Um número menor que zero.

Numerador: A parte superior de uma fração.

Número complexo: Tem a forma $a + bi$, onde a e b e são números reais. Números imaginários e números reais também são números complexos.

número misto: Uma maneira de expressar uma fração imprópria; ele tem um inteiro e a parte da fração escritos juntos, como em $5\frac{1}{2}$.

Números críticos: Os valores de x nos quais uma expressão é igual a zero ou indefinida.

número imaginário: Possui a forma bi, onde b é um número real e $i = \sqrt{-1}$.

número natural: Um número do grupo $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$.

número inteiro: Um número do conjunto {0,1,2,3,4, ...}.

Número irracional: Um número que não pode ser expresso como uma fração. Sua forma decimal não se repete nem termina.

Número racional: Um número que pode ser escrito como uma fração, um decimal finito ou um decimal repetido.

Número real: Qualquer número (seja racional ou irracional, positivo ou negativo) que pode ser expresso como um número decimal.

Oposto: O oposto de um número real n é $-n$, o número multiplicado por −1.

Ordem: Descreve a dimensões de uma matriz. Uma matriz com m fileiras e n colunas é de ordem $m \times n$.

Ordenada: Palavra atribuída para a parte de um par de coordenadas.

Par: Descreve um número que é divisível por 2.

Par de coordenadas: O ponto (x,y) usado para descrever uma localização no plano cartesiano.

Paralela: Descreve linhas que não se cruzam no mesmo plano. Retas paralelas possuem a mesma inclinação.

Perímetro: Distância em torno de um objeto bidimensional (a soma dos comprimentos dos lados).

Perpendicular: Descreve retas no mesmo plano que se cruzam em ângulos retos (90 graus). As inclinações de retas perpendiculares são inversos opostos.

Plano cartesiano: Grade usada para visualizar gráficos matemáticos.

Polinômio: A soma de termos distintos, onde cada um se consiste em um número, em uma ou mais variáveis elevadas a um expoente, ou ambos.

Ponto teste: Um valor ou uma coordenada usada para determinar quais intervalos de uma inequação linear ou regiões de um sistema de inequações lineares compõem a solução.

Positivo: Descreve um número maior que zero.

Potência: Ver *expoente*.

Primo: Um número ou um polinômio que é divisível apenas por si mesmo e por 1.

Principal: A quantia de dinheiro inicialmente depositada em uma conta bancária, geralmente discutida quando os juros são calculados.

produto: O produto de a e b é $a \cdot b$.

proporção: Equação que define duas frações como iguais, como em $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Propriedade: Um fato matemático que é obviamente verdadeiro e aceito sem provas.

Propriedade associativa: A maneira pela qual uma quantia ou produto é agrupado não afeta o seu valor.

Propriedade comutativa: A ordem que você adiciona ou multiplica valores não afeta a soma nem o produto.

Propriedade do produto zero: Se o produto de duas ou mais quantidades é igual a zero, então uma destas quantidades é igual a zero.

propriedade simétrica: Se os lados de uma equação são invertidos, o valor da equação não muda; em outras palavras, se $a = b$ então $b = a$.

quadrado perfeito: Gerado pela multiplicação de um valor por si mesmo; a^2 é um quadrado perfeito porque $a \cdot a = a^2$.

quociente: O quociente de a e b é $a \div b$.

Racionalização do denominador: O processo de remover todos os radicais do denominador de uma fração.

Radicais iguais: Expressões com radicais que contêm radicandos e índices correspondentes.

radical: O símbolo $\sqrt{\ }$.

radicando: Na expressão radical $\sqrt[a]{b}$, *b* é o radicando.

Raiz (de uma equação): Ver *solução.*

Raiz dupla: Solução de uma equação polinomial que ocorre duas vezes, o resultado de um fator repetido no polinômio.

Raiz cúbica: Um radical com índice 3.

Raiz quadrada: Um radical com índice 2.

Regra de Cramer: Técnica usada para resolver sistemas de equações com determinantes de matrizes.

Relação: Uma regra que combina entradas com saídas.

Reta numérica: Sistema de gráficos com apenas um eixo, usado para visualizar inequações que contém uma única variável.

Sistema de equações: Um grupo de equações. Geralmente pedem para você achar um par de coordenadas ou pares que representam a solução ou as soluções comuns a todas as equações no sistema.

Solução: Valores que, se substituídos pela variável (ou pelas variáveis) de uma equação, fazem com que essa equação seja verdadeira.

Substituição: Substituir uma variável ou uma expressão por um valor ou por uma expressão equivalente.

Teorema Fundamental da Álgebra: Garante que um polinômio de grau , se definido como igual a 0, tem exatamente raízes.

Termos: O amontoado de números e/ou variáveis que compõem um polinômio.

Termos iguais: Termos que contêm variáveis exatamente correspondentes.

Teste da raiz racional: Gera uma lista de todas as raízes racionais possíveis de uma equação.

Teste da reta horizontal: Determina se uma função é injetora ou não, baseada em seu gráfico.

Teste da reta Vertical: Determina se uma relação é ou não é uma função, baseada em seu gráfico.

Valor absoluto: O valor não-negativo do número ou da expressão.

Variação direta: Exibida quando dois valores $y = k \cdot x$ e têm a propriedade , onde é um número real.

variação indireta: Exibida por duas quantidades, x e y, quando o produto xy se mantém constante: $xy = k$; também chamada de *variação inversa*.

Variação inversa: Ver *variação indireta*.

Variável: Letra usada para representar um valor desconhecido ou modificado.

Vértice (de um gráfico de valor absoluto): Ponto no qual o gráfico muda de direção.

Volume: A quantidade de espaço dentro de um objeto tridimensional.

zeros (de uma função) Os valores x em que $f(x)$ é igual a zero; os zeros de $f(x)$ são também interceptores x.

Índice

E

F

G

I

J

L

M

N

Q

R

S

T